

На правах рукописи



Проскурин Александр Викторович

**Устойчивость магнитогидродинамических течений
в каналах**

1.1.9 – механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Барнаул – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный технический университет имени И.И. Ползунова» и в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный университет».

Научный консультант:

Сагалаков Анатолий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет», профессор кафедры общей и экспериментальной физики.

Официальные оппоненты:

Андреев Виктор Константинович, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт вычислительного моделирования СО РАН, главный научный сотрудник;

Старченко Сергей Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией;

Муляджанов Рустам Илхамович, д-р физ.-мат. наук, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, ведущий научный сотрудник, заведующий лабораторией.

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский государственный национальный исследовательский университет».

Защита состоится 13 октября 2023 года в 9:30 на заседании диссертационного совета 24.1.125.01 (Д003.035.02) при Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИТПМ СО РАН и по адресу в сети Интернет www.itam.nsc.ru

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью учреждения, просьба направлять на имя ученого секретаря диссертационного совета по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1.

Автореферат разослан « » 2023

Телефон для справок +7 (383) 330-06-74

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.125.01 (Д003.035.02),
д-р физ.-мат. наук



С.А. Гапонов

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности проблемы. Исследование ламинарно-турбулентного перехода в течениях электропроводящей жидкости представляет значительный интерес, обусловленный использованием жидких металлов в приложениях. Современные программы развития ядерной энергетики предусматривают строительство реакторов на быстрых нейтронах, которые охлаждаются жидкими металлами. Использование жидких металлов перспективно и в термоядерных установках. В программе исследований на термоядерном реакторе ИТЭР, который сейчас находится на стадии сборки, запланированы испытания жидкометаллических тестовых модулей бланкета. Эти модули в настоящее время интенсивно разрабатываются, что влечет за собой большой объем исследований, экспериментальных и теоретических. Течения жидких металлов используются также в промышленности, например, в металлургии.

Для проектирования устройств, в которых происходит движение жидких металлов, большое значение имеет взаимодействие металла с магнитным полем. Это поле может быть неотъемлемой частью технологического процесса, например, когда плазма в термоядерном реакторе удерживается сильным магнитным полем. Магнитное поле в жидком металле может возникать спонтанно за счет термоэлектрических токов и усиливаться за счет эффектов динамо. Такие эффекты экспериментально наблюдались в частях реактора БН-600 и даже использовались для исследования течений в реакторе. Магнитное поле может вноситься извне с целью управления движением жидкого металла: его перекачки (МГД-насос), остановки (МГД-клапан), оптимизации течения и так далее.

Для работы магнитогидродинамических устройств большое значение имеют режимы течений, которые будут в них возникать: ламинарный или турбулентный. Эксперименты с жидкими металлами намного сложнее, чем с газами и жидкостями, поэтому в исследованиях и проектировании ведущая роль отводится математическому моделированию с использованием численных методов.

Наиболее разработаны методы исследования устойчивости параллельных течений в каналах. Однако, несмотря на большой объем публикаций этой области, исчерпывающие результаты получены только в единичных случаях. Это связано с тем, что численное решение таких задач сопряжено со значительными трудностями и требует использования специальных методов. Наиболее хорошо исследована устойчивость течений между параллельными плоскостями: течений Гартмана, Пуазейля, Куэтта и некоторых простейших других.

В технических устройствах жидкие металлы движутся не только прямолинейно, но и в каналах сложной формы. Устойчивость течений электропроводящей жидкости в областях сложной формы в настоящее время изучена очень мало. Исследования устойчивости таких течений намного сложнее, чем параллельных, так как трудности, присущие задаче и описывающим ее уравнениям, увеличиваются за счет нетривиальной геометрии. Работы, посвященные устойчивости непараллельных течений, в заметном количестве стали появляться лишь в 90х годах двадцатого века, после изобретения спектрально-элементного метода, который позволил применять спектральный подход к областям сложной геометрии. В настоящее время это единственный метод высокого порядка точности, который можно широко использовать для исследования течений в реальной геометрии. Большое значение имеет разработка новых ненасыщаемых численных методов, которые позволили бы проводить независимую проверку результатов исследования устойчивости и, возможно, были бы более простыми.

Цели и задачи исследования. Целью работы являются исследование устойчивости магнитогидродинамических течений в каналах, разработка соответствующих методов и компьютерных программ. Для этого решаются перечисленные ниже задачи.

1. Исследование устойчивости к малым возмущениям плоского течения Пуазейля и течения в канале кольцевого сечения в присутствии продольного магнитного поля в широком диапазоне параметров. Исследование устойчивости к малым возмущениям течения вязкой электропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля.
2. Разработка подхода для моделирования течений в трубах на основе функций Рвачева. Исследование течения вязкой жидкости в трубе с внутренним элементом и течения вязкой электропроводящей жидкости в трубе сложного сечения в поперечном магнитном поле. Создание численного метода для исследования устойчивости течений на основе функций Рвачева. Исследования устойчивости локализованных возмущений в плоском канале и магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра.
3. Разработка подхода для исследования течений вязкой электропроводящей жидкости и их устойчивости, линейной и нелинейной, на основе спектрально-элементного метода и создание соответствующей программы для ЭВМ. Верификация численных алгоритмов и программы.

4. Исследование режимов течения вязкой электропроводящей жидкости в изогнутом канале и устойчивости этого течения.

Научная новизна. Получены новые данные об устойчивости магнито-гидродинамического течения в плоском канале и в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля в случае произвольных магнитных чисел Прандтля: обнаружены области стабилизации при изменении магнитного числа Прандтля, обнаружены скачки критических чисел Рейнольдса при изменении числа Альфвена, найдена новая мода. Впервые показано, что добавление азимутального поля при наличии продольного может дестабилизировать течение в канале кольцевого сечения.

Предложен новый метод на основе функций Рвачева для исследования устойчивости двумерных магнито-гидродинамических течений.

Разработана компьютерная программа для моделирования магнито-гидродинамических течений с использованием спектрально-элементного подхода и показана корректность ее работы. Программа не имеет аналогов в части возможностей исследования устойчивости МГД-течений. Обоснован новый сценарий потери устойчивости МГД-течений под действием нелинейных возмущений специального вида.

Исследованы режимы течения в изогнутом канале с магнитным полем и без него, обнаружен и изучен новый эффект возникновения противотечения, которое возникает за счет взаимодействия жидкости и магнитного поля в изгибе канала. Показана устойчивость этого противотечения. Впервые определены критические числа Рейнольдса течения в изогнутом канале для двумерных и трехмерных возмущений.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в том, что полученные результаты способствуют более глубокому пониманию вопросов взаимодействия возмущений вязкой несжимаемой жидкости с магнитным полем в плоских каналах и каналах сложной формы. Опираясь на полученные в работе результаты о зависимости критических чисел Рейнольдса от магнитного числа Прандтля и числа Альфвена, возможно производить оценку параметров перспективных МГД-устройств в случае, если магнитное число Рейнольдса нельзя считать малым. Получен ряд результатов о режимах течения в изогнутом канале, важных для приложений, показана устойчивость этих режимов. Методы, изложенные в работе, решают практическую проблему изучения переходных процессов и оценки параметров устойчивости течений в каналах сложной формы, характерных для технических устройств: элементов термоядерных и ядерных реакторов, частей жидкометаллических батарей и так далее.

Положения, выносимые на защиту

1. Результаты исследования устойчивости плоского течения и течения в трубе кольцевого сечения вязкой электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле. Условия, при которых могут наблюдаться скачки критических чисел Рейнольдса и становится неустойчивой найденная в работе новая мода. Особенности дестабилизирующего влияния азимутального магнитного поля на течение в кольцевом зазоре.
2. Бессеточный метод численного исследования устойчивости двумерных течений, разработанный на основе метода функций Рвачева. Результаты исследования устойчивости локализованных возмущений в плоском канале и исследования устойчивости магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра. Выводы об особенностях применения метода функций Рвачева в задачах гидродинамики и гидродинамической устойчивости.
3. Программа для исследования магнитогидродинамических течений и их устойчивости в областях сложной геометрии на основе спектрально-элементного подхода. Верификация численной схемы и программы, произведенная путем сравнения с аналитическими решениями и данными, приведенными в литературе и полученными независимо.
4. Сценарий развития неустойчивости магнитогидродинамических течений за счет действия локализованных возмущений.
5. Результаты исследования устойчивости течения в изогнутом канале без магнитного поля.
6. Эффект возникновения устойчивых противотечений в изогнутом канале за счет действия магнитных сил.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность изложенных в работе результатов достигается использованием хорошо себя зарекомендовавших и обоснованных методов, анализом физической картины развития и стабилизации возмущений, совпадением результатов в частных случаях с данными других авторов. В некоторых случаях вычисления

дублировались с использованием независимых численных методов. Основные результаты диссертации докладывались автором на конференциях: тринадцатой зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2003); международной конференции «Устойчивость и турбулентность течений однородных и гетерогенных жидкостей» (Новосибирск, 2004); международной конференции «International conference on Open Magnetic Systems for Plasma Confinement» (Новосибирск, 2004); всероссийских конференциях «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020; Барнаул, 2017; Бийск, 2014, 2011, 2008, 2005); всероссийской конференции для молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2010); восьмой международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015); всероссийских съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015; Уфа, 2019); международных конференциях «Russian conference on Magnetohydrodynamics» (Пермь, 2015, 2018, 2021); всероссийской конференции «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2018, 2019, 2020); всероссийской конференции с международным участием «Математические проблемы механики сплошных сред», посвященной столетию Л.В.Овсянникова (Новосибирск, 2019); международной конференции «8-th International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics» (Ирландия, Лимерик, 2019); всероссийской конференции «Сибирский теплофизический семинар» (Новосибирск, 2019); семинаре «Прикладная гидродинамика» Института гидродинамики СО РАН под руководством чл.-корр РАН В.В. Пухначева и д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюка (2019, 2021, 2023); семинаре лаборатории моделирования Института теплофизики СО РАН под руководством д.ф.-м.н. Н.И. Яворского (2019); объединенном семинаре ФИЦ ИВТ СО РАН, кафедры математического моделирования НГУ, кафедры вычислительных технологий НГТУ «Информационно-вычислительные технологии» под руководством ак. РАН Ю.И. Шокина и д.ф.-м.н. В.М. Ковени (2020), семинаре Томского государственного университета под руководством Г.Р. Шрагера (2021), семинаре Института математики СО РАН под руководством д.ф.-м.н. Д.Л. Ткачева (2021), семинаре «Краевые задачи механики сплошных сред» Института гидродинамики СО РАН под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова (2021), семинаре «Математическое моделирование в механике» Института теоретической и прикладной механики СО РАН под руководством ак. РАН В.М. Фомина (2021), семинаре «Механика реагирующих систем» Института проблем механики РАН под руководством чл.-корр. РАН С.Е. Якуша и д.ф.-м.н. А.Д. Полянина (2021), семинаре «Теоретическая и прикладная механика» Института теоретической и прикладной механики

СО РАН (2022), Пермском гидродинамическом семинаре под руководством д.ф.-м.н. Т.П.Любимовой (2022), семинаре «Математическое моделирование в механике» Института вычислительного моделирования СО РАН под руководством д.ф.-м.н. В.К. Андреева (2023).

Проведенные в диссертационной работе исследования были поддержаны федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (14.740.11.0355).

Личный вклад автора. В диссертации приведены результаты, полученные лично автором. Все основные компьютерные программы, включая [23-25, 27, 28], созданы единолично автором, автор единолично провел все компьютерные расчеты. Автором выполнена обработка результатов и подготовлены все графические и табличные материалы, приведенные в диссертации. Все положения, выносимые на защиту, получены лично автором. Монография [1] написана совместно с научным консультантом профессором А.М. Сагалаковым. Профессор А.М. Сагалаков участвовал в обсуждении и интерпретации результатов, обсуждении задач, решаемых компьютерной программой [26], работе над текстом публикаций [3, 4, 6-13, 15-22, 29, 31, 33-62, 65, 66].

Содержание работы

Глава 1 посвящена анализу современного состояния исследований в области устойчивости магнитогидродинамических течений. Проведен обзор исследований устойчивости параллельных и непараллельных течений, использующихся численных методов.

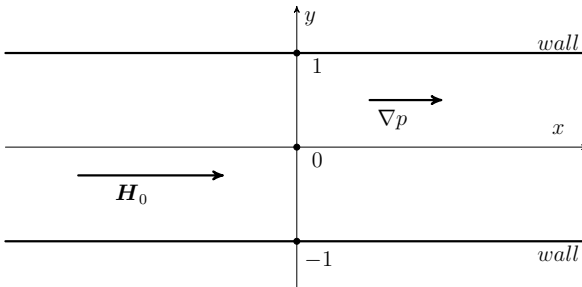


Рис. 1 — Плоский канал

В **главе 2** изложена постановка задачи устойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости, введено базовое уравнение гидродинамической устойчивости – уравнение Орра-Зоммерфельда, на примере которого описаны некоторые эффективные численные методы исследования устойчивости параллельных течений вязкой электропроводящей жидкости: метод дифференциальной прогонки и метод коллокаций.

В **разделе 2.6** рассмотрена устойчивость течения между параллельными плоскостями при наличии продольного магнитного поля (рисунок 1). Линеаризованная система уравнений магнитной гидродинамики для возмущений имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) \mathbf{h} = (\mathbf{H}_0\nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{h}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + Al (\mathbf{H}_0\nabla) \mathbf{h} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{H}_0 – стационарные компоненты скорости и магнитного поля, \mathbf{v} , \mathbf{h} – возмущение, $Re = \frac{V_0 d}{\nu}$ – число Рейнольдса, $R_m = V_0 d \frac{4\pi\sigma}{c^2}$ – магнитное число Рейнольдса, $Al = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_0^2}$ – число Альфвена, d – полуширина канала, V_0 – среднерасходная скорость, H_0 – величина напряженности внешнего магнитного поля. Также использовалось магнитное число Прандтля $P_m = \frac{R_m}{Re} = \frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}$. Решение линеаризованной системы (1)-(3) ищется в виде

$$\{v_x(y), v_y(y), v_z(y), h_x(y), h_y(y), h_z(y), q(y)\} \exp(i\alpha(x - Ct) + i\beta z), \quad (4)$$

где $v_x, v_y, v_z, h_x, h_y, h_z$, – амплитуды скорости и напряженности магнитного поля, q – амплитуда давления, α – продольное волновое число, β – поперечное волновое число, $C = X + iY$, αX – фазовая скорость, а αY – декремент затухания возмущения ($Y < 0$) или инкремент его нарастания ($Y > 0$). Для вычислений использовался метод коллокаций, реализованный компьютерной программой [27], а также метод дифференциальной прогонки.

Система уравнений для возмущений допускает преобразования Сквайра

$$Re_* = \frac{\alpha}{k} (Re_{eff})_*, \quad (5)$$

где звездочкой обозначены критические числа Рейнольдса, а Re_{eff} – эффективное число Рейнольдса, соответствующее решению двумерной задачи.

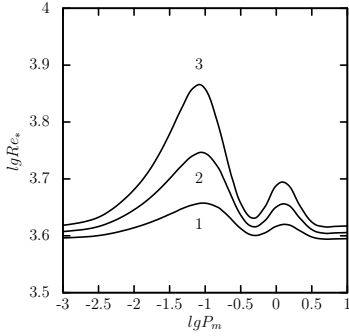


Рис. 2 — Зависимости $Re_*(P_m)$ при $Al = 0.001, 0.002, 0.003$

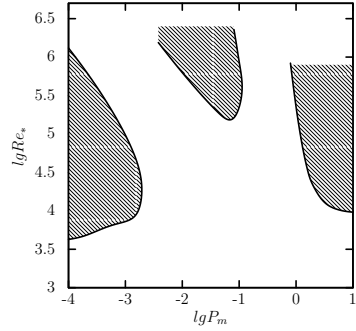


Рис. 3 — Зависимости $Re_*(P_m)$ при $Al = 0.02$

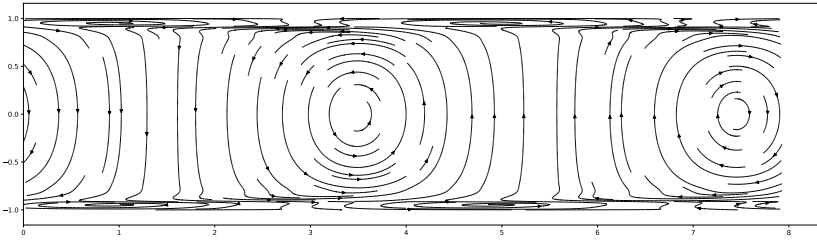


Рис. 4 — Линии тока новой моды при $P_m = 0.025, \lg Re = 6.0, Al = 0.02$ в точке максимального значения Y

Области неустойчивости для трехмерных возмущений могут быть получены смещением вверх графиков критических зависимостей для двумерных возмущений в соответствии с формулой (5).

На рисунках 2 и 3 приведены зависимости $Re_*(P_m)$ при $Al = 0.001, 0.002, 0.003$ и $Al = 0.02$. На рис. 2 в точках $P_m \approx 0.1$ и $P_m \approx 1.0$ данные зависимости имеют максимумы, высота которых сильно зависит от числа Альфвена. При дальнейшем увеличении числа Альфвена в этой области магнитных чисел Прандтля наблюдается стабилизация течения, как показано на рисунке 3, где области неустойчивости двумерных возмущений

обозначены штриховкой. На рисунке 4 приведены линии тока новой ветви неустойчивых возмущений. Эта мода имеет достаточно узкие пристенные слои, в которых существуют вихри, отдельные от основной цепочки вихрей. Изложенные в разделе 2.6 результаты опубликованы в работах [10, 12, 13].

В **разделе 2.7** представлены результаты исследования устойчивости течения в трубе кольцевого сечения в продольном магнитном поле (см. рисунок 5). Между цилиндрами под действием постоянного продольного градиента давления протекает слабоэлектропроводящая вязкая жидкость со среднерасходной скоростью V_a . Решение линеаризованной системы (1)-(3) можно представить в виде

$$\{\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r), q(r)\} \exp^{i\alpha(z-Ct)+im\varphi}, \quad (6)$$

где q – возмущение давления, $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z$ – амплитуды скорости, h_r, h_φ, h_z – амплитуды напряженности магнитного поля, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ – азимутальное волновое число, α – осевое волновое число, $C = X + iY$ – комплексная фазовая скорость. Если $Y > 0$, возмущение нарастает. Соответствующая спектральная задача решалась методом дифференциальной прогонки аналогично плоскому случаю, изложенному выше.

Была изучена устойчивость этого течения при промежуточном значении радиуса внутреннего цилиндра $\xi = 1$, достаточно далеко как от плоского случая, рассмотренного ранее, так и от случая очень тонкого внутреннего цилиндра, когда все азимутальные моды устойчивы или, по крайней мере, имеют очень большие критические числа Рейнольдса (рисунок 6). На рисунке 7 приведены зависимости критических чисел Рейнольдса от магнитного числа Прандтля. Обнаружено, что при $P_m > 10$ и $P_m < 10^{-4}$ критические числа Рейнольдса стремятся к предельным случаям $P_m \rightarrow \infty$,

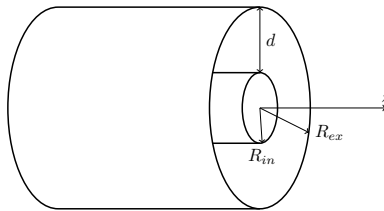


Рис. 5 — Коаксиальные цилиндры

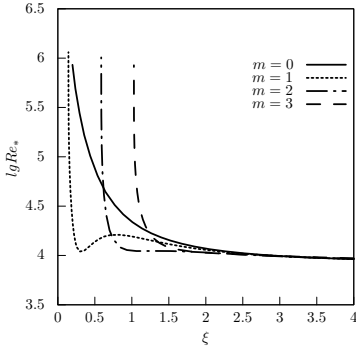


Рис. 6 — Зависимости критических чисел Рейнольдса Re_* от ξ при $P_m = 0.01$, $Al = 0.001$

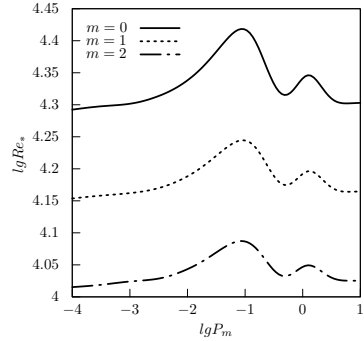


Рис. 7 — Зависимости критических чисел Рейнольдса Re_* от P_m при $\xi = 1$, $Al = 0.001$

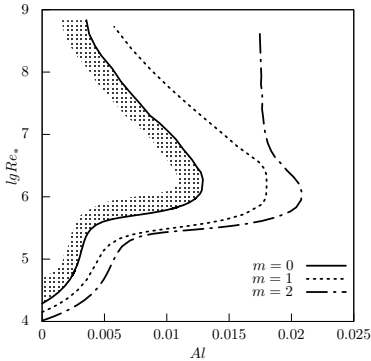


Рис. 8 — Зависимости критических чисел Рейнольдса Re_* от Al при $\xi = 1$, $\lg P_m = -1$

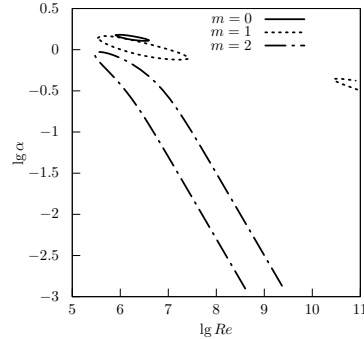


Рис. 9 — Нейтральные зависимости при $Al = 0.012$, $\xi = 1$, $\lg P_m = -1$

$P_m \rightarrow 0$, соответственно. При $P_m \approx 0.1$ и $P_m \approx 1.0$ течение особенно чувствительно к стабилизирующему влиянию магнитного поля. В этих диапазонах при увеличении магнитного поля наблюдается скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса, показанное на рисунке 8, и существование замкнутых нейтральных кривых (рисунок 9). Изложенные в разделе 2.7 результаты опубликованы в работе [5]. Вычисления собственных значений производились при помощи программ [23, 25], критические и нейтральные

ные числа, спектральные зависимости вычислялись с помощью программы с графическим интерфейсом [24].

В **разделе 2.8** рассмотрена устойчивость течения в трубе кольцевого сечения в спиральном магнитном поле. Внешнее магнитное поле задано выражением

$$H_{0z} = H_0 \cos \theta, \quad H_{0\varphi} = \frac{H_0 \sin \theta r_{\text{ex}}}{r}, \quad r \in [R_{\text{in}}, R_{\text{ex}}], \quad (7)$$

где θ – угол между вектором напряженности магнитного поля на внешней стенке и осью трубы, H_0 – модуль напряженности внешнего магнитного поля на внешней границе канала.

Влияние азимутального магнитного поля таково, что моды с отрицательными азимутальными волновыми числами менее устойчивы. Этот эффект проявляется при наличии одновременно азимутальной и продольной компонент магнитного поля. В случае только азимутального магнитного поля мода $m = 0$ не взаимодействует с магнитным полем и поэтому увеличение числа Гартмана не приводит к увеличению критических чисел Рейнольдса. Основные изложенные в разделе 2.8 результаты опубликованы в работе [11].

В **главе 3** обсуждается приложение метода функций Рвачева к задачам гидродинамики и гидродинамической устойчивости.

В **разделах 3.2 и 3.3** при помощи метода функций Рвачева вычислены поля скоростей вязкой жидкости в круглой и прямоугольной трубе с внутренним элементом, который может двигаться внутри трубы [9]. Для круглой трубы также рассмотрена деформация стенки.

В **разделе 3.4** рассмотрено движение несжимаемой электропроводящей вязкой жидкости в трубе сложной геометрии в присутствии магнитного поля. Поперечное сечение трубы приведено на рисунке 10, внешнее магнитное поле направлено вертикально. Вязкая электропроводящая жидкость течет в направлении z под действием постоянного градиента давления $\frac{\partial p}{\partial z}$. H_0 – внешнее однородное магнитное поле, которое направлено вдоль оси y . Таким образом, скорость имеет только компоненту V_z , а порожденное движением жидкости магнитное поле имеет только компоненту H_z . В этом случае уравнения магнитной гидродинамики могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} M \frac{\partial V_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z &= 0, \\ M \frac{\partial H_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V_z &= -1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $M = \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}$ – число Гартмана, H_0 – внешнее магнитное поле, σ – электропроводность жидкости. Граничные условия на идеально электропроводящей стенке Ω имеют вид

$$V = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0. \quad (9)$$

Структура, приближенно представляющая решение системы (8) с учетом граничных условий (9) имеет вид

$$\begin{aligned} V &= \omega \Phi_1, \\ H &= \Phi_2 + \omega^2 \Phi_2 + D_1 \Phi_2, \end{aligned}$$

где Φ_1, Φ_2 – неопределенные компоненты пучка вида $\sum_{ij} a_{ij} L_i(x) L_j(y)$, в которых a_{ij} – коэффициенты, $L_i(x), L_j(y)$ – полиномы Лежандра степени i и j , приведенные к соответствующему интервалу, ω – граничная функция. Дискретизация производилась методом Галеркина, интегралы вычислялись с помощью формулы Симпсона. Значительное ускорение вычислений было достигнуто за счет вычислений на графическом ускорителе с использованием технологии OpenCL. Результаты, изложенные в разделе 3.4, опубликованы в статье [8].

В **разделе 3.5** поставлена задача устойчивости двумерных течений. Эволюция возмущений описывается уравнением

$$C \Delta \psi = \frac{1}{Re} \Delta^2 \psi - V \Delta \psi_y + \psi_x \Delta U - U \Delta \psi_x + \psi_y \Delta V - St \psi_{xx}, \quad (10)$$

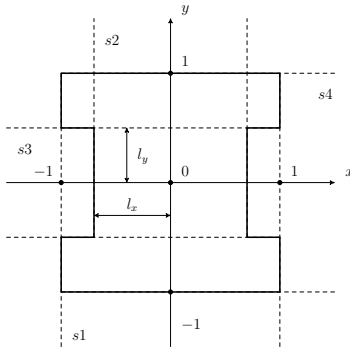


Рис. 10 — Сечение канала

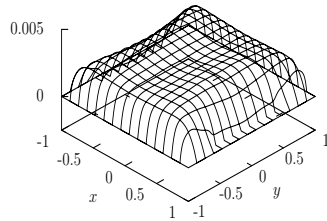


Рис. 11 — График скорости при $M = 20$

где $\psi(x, y)$ – функция тока, ее производные обозначены индексами, U и V – x и y компоненты стационарного решения и $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$, $C = X + iY$, в котором X – коэффициент затухания, Y – частота возмущения, $St = \frac{\sigma B_0^2 d}{\rho U_\infty}$ – число Стюарта, определяющее величину магнитных сил, действующих на жидкость со стороны продольного магнитного поля B_0 . Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Структура решения может быть записана в виде

$$\psi = \omega^2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (12)$$

где $\omega(x, y)$ функция расстояния до границ, $T(x)$ и $T(y)$ полиномы Чебышева, приведенные к соответствующим интервалам, a_{ij} – неизвестные коэффициенты. Множество точек коллокации принято в нулях полиномов Чебышева, тогда можно записать алгебраическую проблему на собственные значения

$$Av = CBv, \quad (13)$$

где $v = \{a_{00}, a_{01}, \dots, a_{n(k-1)}, a_{nk}\}$. Для задач устойчивости типичный размер матриц равен $10^4 \times 10^4$. Заполненные матрицы такого размера эффективно решаются только итерационными методами, я использовал библиотеки ARPACK и SLEPC. Вычисление элементов матриц распараллеливалось с помощью технологии OpenMP на компьютерах с числом ядер 8 и 12.

В **разделе 3.6** было рассмотрена устойчивость плоского течения Пуазейля для возмущений, ограниченных по длине L . Было обнаружено, что локализованные возмущения устойчивы при $L < 4$ и $Re < 10^4$ [19].

В **разделе 3.7** изучалась устойчивость магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра (см. рисунок 12). На рисунке 13 приведен график граничной функции. Магнитное поле B_0 направлено горизонтально, что привело к появлению в уравнении (10) члена $St\psi_{xx}$. В качестве параметров для определения числа Рейнольдса были приняты скорость жидкости на бесконечности U_∞ , диаметр цилиндра d .

На рисунках 14 и 15 показаны коэффициенты затухания и частоты в зависимости от числа Рейнольдса при $M = 0, 1$. Установлено, что при $M = 0$ критическое число Рейнольдса лежит между 45 и 46, что совпадает с данными, приведенными в литературе. На рисунке 16 изображены линии тока

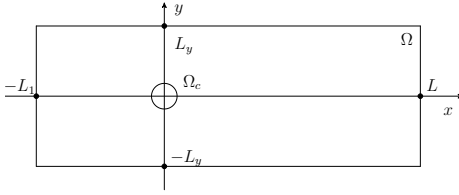
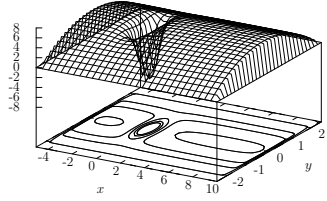
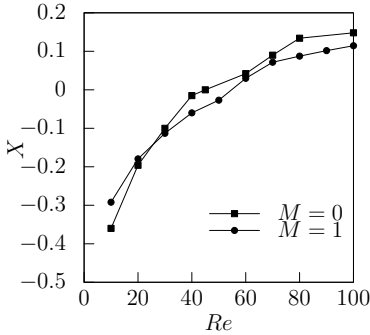
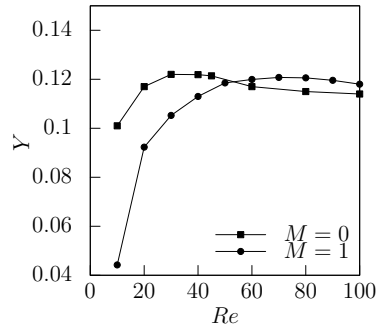


Рис. 12 — Схема течения возле цилиндра

Рис. 13 — График функции $\omega(x, y)$ Рис. 14 — Зависимости коэффициента затухания X от числа Рейнольдса при $M = 0, 1$ Рис. 15 — Зависимости частоты Y от числа Рейнольдса при $M = 0, 1$

действительной части наиболее опасной неустойчивой моды при $Re = 80$. Результаты, изложенные в разделе 3.7, опубликованы в статье [15].

В главе 4 изложен алгоритм численного моделирования движения электропроводящей вязкой жидкости и исследования устойчивости этого движения, включая переход к турбулентности. Приближенное представление полей физических величин мною было предложено производить при помощи спектрально-элементного метода.

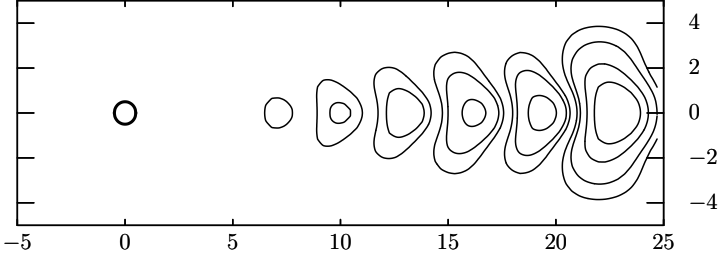


Рис. 16 — Линии тока действительной части наиболее опасной моды $Re = 50$, $M = 1$

В разделе 4.1 введена система уравнений магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + St (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \Delta \varphi &= \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $Re = \frac{L_0 V_0}{\nu}$ — число Рейнольдса, $St = \frac{\sigma H_0^2 L_0}{\rho V_0}$ — параметр, определяющий действие магнитного поля (число Стюарта), L_0 , V_0 и H_0 характеристические величины расстояния, скорости, магнитного поля, соответственно.

Для исследования магнитогидродинамических течений в приближении (14) и их устойчивости я разработал компьютерную программу на ос-

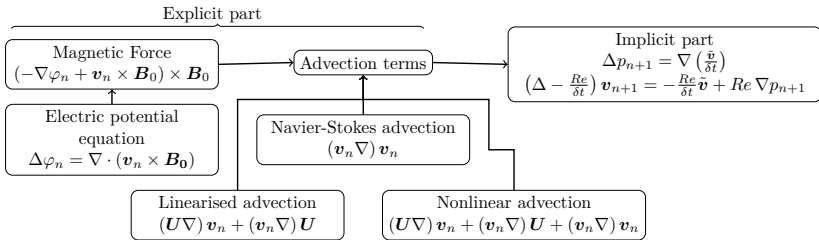


Рис. 17 — Схема с коррекцией скорости

нове спектрально-элементного программного комплекса Nektar++. На рисунке 17 приведена схема работы этой программы, реализующей процедуру вычислений с коррекцией скорости для уравнений магнитной гидродинамики. Сначала решается уравнение для электрического потенциала и вычисляются магнитные силы, действующие на жидкость. Далее, вычисляется конвективный член в уравнениях (14). В зависимости от конкретной задачи он имеет общий вид (Navier-Stokes advection), линейный (Linearized advection, раздел диссертации 4.3), нелинейный (Nonlinear advection, раздел диссертации 4.4).

Для проверки работы программы были произведены расчеты течений, для которых известно аналитическое решение: течения Гартмана и течения в квадратной трубе. Было обнаружено, что отклонение от точных значений легко получить порядка 10^{-13} для течения Гартмана и 10^{-5} для течения в прямоугольной трубе. Подробно результаты тестов и особенности численной схемы изложены в **разделе 4.2**.

В **разделе 4.3** объясняются особенности анализа устойчивости с применением численной схемы интегрирования по времени линеаризованного уравнения. Изложены результаты расчетов устойчивости течения Гартмана и Ханта, произведено сравнение с независимыми данными из литературы. Приведенные в разделах 4.1, 4.2, 4.3 результаты опубликованы в работе [7].

В **разделе 4.4** предложен метод исследования нелинейной устойчивости, основанный на разделении решения на стационарную часть и нестационарную добавку. Сначала вычисляется стационарное течение, после чего задаются начальные условия для возмущения и производится интегрирование по времени. Такой подход дает больше возможностей, чем в случае использования уравнений (14): стационарное течение можно задать аналитически, можно вычислять стационарное течение при помощи приемов стабилизации, можно решать более точные постановки задач, когда, например, граничные условия для возмущений отличаются от граничных условий для стационарного течения.

В для проверки работы программы с возмущениями в **разделах 4.5 и 4.6** была рассмотрена устойчивость течения Гартмана по отношению к возмущениям специального вида, моделирующим вдув жидкости в канал через нижнюю стенку [3, 16]. Вдув генерирует завихренность в нижней части канала. Внесенное возмущение может нарастать или затухать, в зависимости от значения параметра $R = \frac{Re}{M}$. На рисунке 18 изображены поля абсолютной величины скорости в продольном сечении, проходящем через ось вдува. Полученная картина устойчивости течения Гартмана соответствует как экспериментальным результатам, так и теоретическим.



Рис. 18 — Амплитуда скорости при $M = 6$, $Re = 6000$, $A = 1$, $T = 1$: $t = 1$ (a), $t = 41$ (b), $t = 81$ (c), сечение в продольной плоскости канала через центр возмущения

Глава 5 посвящена исследованию магнитогидродинамических течений в каналах сложной геометрии.

В **разделе 5.1** классифицированы стационарные течения, которые возникают в изогнутом канале (см. рисунок 19) без магнитного поля, изучено возникновение областей рециркуляции в зависимости от числа Рейнольдса. Обсуждаются условия возникновения квазипериодического течения. В **разделе 5.2** приведены результаты исследования устойчивости течения в изогнутом канале в отсутствие магнитного поля. На рисунке 20 приведена нейтральная кривая. Она содержит две области неустойчивости, верхняя из которых соответствует монотонным возмущениям, а нижняя – периодическим. На рисунке 21 приведен пример монотонной собственной функции. Изложенные в разделах 5.1 и 5.2 результаты опубликованы в статьях [2, 14].

В **разделах 5.3 и 5.4** приведены результаты исследования стационарных режимов течения электропроводящей жидкости в изогнутом канале при наличии вертикального и горизонтального магнитного поля, соответственно. Было обнаружено возникновение противотечений, примеры которых приведены на рисунке 22. Обычно обратные течения возникают как вихри за неоднородностями потока, такими как цилиндр в потоке жидкости или

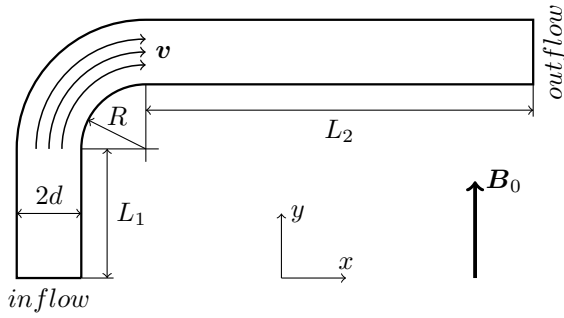


Рис. 19 — Изогнутый канал

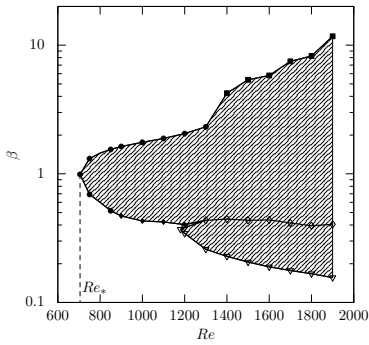


Рис. 20 — Нейтральная кривая при $\delta = 1$. Штриховкой обозначена область параметров, в которой течение неустойчиво

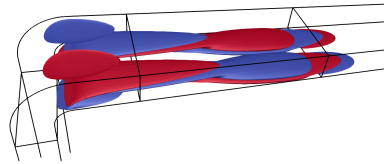


Рис. 21 — Визуализация неустойчивой B -моды при $Re = 1100$, $\beta = 1$: изоповерхности ± 0.1 продольной компоненты завихренности

ступенька в канале, в изогнутом канале непосредственно после изгиба, или если существуют силы, направленные противоположно основному потоку, например, конвективные. В рассмотренном случае возникновение противотечения неожиданно, так как не следует из очевидных особенностей магнитного поля или геометрии канала. Изложенные в разделах 5.3 и 5.4 результаты опубликованы в статьях [4, 6].

В **разделе 5.5** изучена линейная устойчивость течения в изогнутом канале при наличии вертикального магнитного поля по отношению к трехмерным возмущениям при $M = 100$. Установлено, что при $Re < 230$ течение устойчиво. При $Re > 180$ наиболее опасны монотонные возмущения, а при меньших числах Рейнольдса – периодические. На рисунке 23 приведены линии тока собственной функции, которая соответствует наиболее опасному собственному значению.

В **разделе 5.6** показано, что линейная теория вполне адекватно описывает возникновение неустойчивости. Для этого использовалась техника локализованных возмущений, введенная в разделе 4.6. Стенки канала были приняты идеально-электропроводящими и на них было задано локальное возмущение электрического потенциала. Возникающее возмущение скорости показано на рисунке 24. В случае хорошо электропроводящих стенок критические числа Рейнольдса по линейной теории несколько меньше, чем в случае диэлектрических стенок, рассмотренном в разделе 5.5. Было определено, что при $Re = 150$ течение линейно-устойчиво, а при $Re = 160$ – линейно-неустойчиво. Изучение эволюции локализованных нелинейных возмущений привело к результатам, аналогичным линейной теории [3].

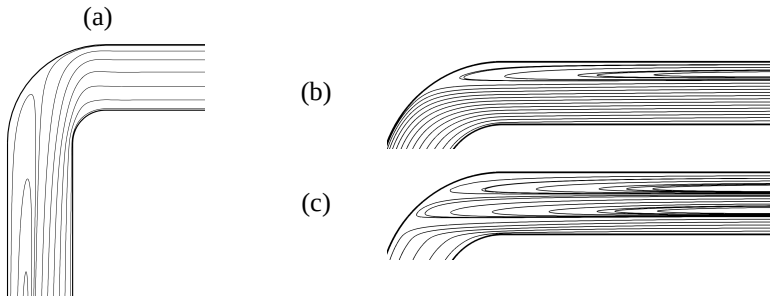


Рис. 22 — Линии тока противотечения в вертикальном магнитном поле при $Re = 103.16$ и $St = 58.16$ (a) и в горизонтальном магнитном поле при $Re = 1000$, $Ha = 100$ (b), $Re = 0.1$, $Ha = 300$ (c)

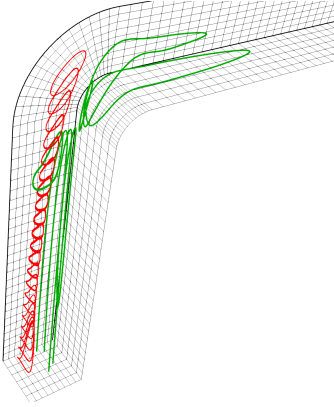


Рис. 23 — Вихревые структуры собственных функций, линии тока при $M = 100$, $Re = 230$

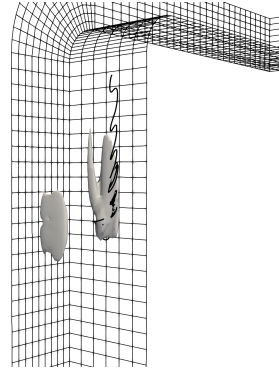


Рис. 24 — Изоповерхности амплитуды скорости 0.8 возмущения конечной амплитуды и пример линии тока при $M = 100$, $Re = 160$, $A = 1$, $T = 5$, $t = 5$

Основные результаты и выводы

В диссертации сформулированы и обоснованы результаты, совокупность которых можно считать научным достижением в области исследования устойчивости магнитогидродинамических течений.

1. Исследована устойчивость плоского течения и течения в канале кольцевого сечения в продольном магнитном поле во всем диапазоне магнитных чисел Прандтля. Обнаружена стабилизация течения при $P_m \sim 0.1$, 1 и сложная структура критических зависимостей, приводящая к скачкам критических чисел Рейнольдса при изменении величин параметров. Найдена новая ветвь неустойчивости течения в продольном магнитном поле, результат проверен использованием независимых численных методов, независимых компьютерных программ, а также, в более позднее время, независимой группой исследователей. Обнаружено, что внесение азимутального магнитного поля при наличии продольного может дестабилизировать течение в канале кольцевого сечения.

2. Разработан новый метод исследования устойчивости течений в областях сложной геометрии с использованием функций Рвачева. Изучены преимущества метода функций Рвачева с учетом современных возможностей на примере моделирования течений в трубах сложного сечения и устойчивости двумерных течений.
3. На основе спектрально-элементного подхода разработана программа для ЭВМ, которая позволяет моделировать стационарные и нестационарные течения электропроводящей жидкости в магнитном поле, исследовать линейную устойчивость стационарных течений электропроводящей жидкости, изучать эволюцию возмущений конечной амплитуды, внесенных в стационарное течение. Корректность работы численной схемы и программы подтверждена сравнением с аналитическими решениями и данными, приведенными в литературе. В частности, на примере течения Гартмана введена модель нелинейных возмущений специального вида. Устойчивость этого течения исследовалась при числах Гартмана $M = 6, 20, 50$ и числах Рейнольдса $Re < 25000$. Было обнаружено, что верхняя граница устойчивости $R \approx 300$ (где R – число Рейнольдса, вычисленное по ширине слоя Гартмана) соответствует данным, полученным независимо другими способами.
4. Изучена устойчивость течения в изогнутом на 90 градусов канале. Исследованы размеры областей рециркуляции, которые возникают в изгибе канала, в зависимости от числа Рейнольдса. Обнаружено, что течение устойчиво к малым двумерным возмущениям при $Re < 1900$, но очень чувствительно к возмущениям конечной амплитуды, вследствие действия которых может возникать двумерное квазипериодическое движение при $Re > 600-700$. Было найдено, что этом случае для вычисления стационарного течения эффективен метод выборочного подавления частот. Исследована структура неустойчивых трехмерных мод и вычислены критические числа Рейнольдса в зависимости от радиуса изгиба канала. Изучены режимы течения в изогнутом на 90 градусов канале в горизонтальном и вертикальном магнитном поле. Обнаружено, что взаимодействие магнитного поля и потока в изгибе может приводить к возникновению противотечений в одном из патрубков изогнутого канала. Показано, что эти противотечения устойчивы к трехмерным линейным и нелинейным возмущениям.

Публикации по теме диссертации

Монографии

1. *Проскурин, А. В.* Ламинарно-турбулентный переход в МГД-течениях / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015. – С. 179.

Публикации WoS и Scopus

2. *Proskurin, A. V.* Linear stability of flow in a 90° bend / A. V. Proskurin // *Physics of Fluids*. – 2022. – Vol. 34, no. 3. – P. 0341111.
3. *Proskurin, A.* A simple scenario of the laminar breakdown in liquid metal flows / A. Proskurin, A. M. Sagalakov // *Magnetohydrodynamics*. – 2021. – Vol. 57, no. 2. – P. 191-209.
4. *Proskurin, A. V.* Patterns of Magnetohydrodynamic Flow in the Bent Channel / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics&Physics*. – 2020. – Vol. 13, no. 6. – P. 1-6.
5. *Проскурин, А. В.* Устойчивость напорного течения между коаксиальными цилиндрами в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2020. – Т. 61, № 6. – С. 16-23.
6. *Proskurin, A. V.* An origin of magnetohydrodynamic reverse flow in 90° bends / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // *Physics of Fluids*. – 2018. – Vol. 30, no. 8. – P. 081701.
7. *Proskurin, A.* Spectral/hp element MHD solver / A. Proskurin, A. M. Sagalakov // *Magnetohydrodynamics*. – 2018. – Vol. 54, no. 4. – P. 361-371.
8. *Proskurin, A.* A method for modelling MHD flows in ducts. / A. Proskurin, A. Sagalakov // *Magnetohydrodynamics*. – 2016. – Vol. 52.
9. *Проскурин, А. В.* Математическое моделирование одного течения в трубе с помощью метода R-функций / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2016. – Т. 19, № 3. – С. 68-74.
10. *Проскурин, А.* Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля / А. Проскурин, А. Сагалаков // *Журнал технической физики*. – 2012. – Т. 82, № 5. – С. 29-35.

11. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Теплофизика и аэромеханика. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 419-428.
12. *Проскурин, А.* Новая ветвь неустойчивости магнитогидродинамического течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. Проскурин, А. Сагалаков // Письма в журнал технической физики. – 2008. – Т. 34, № 5. – С. 40-45.
13. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 383-390.
14. *Proskurin, A. V.* Mathematical modelling of unstable bent flow using the selective frequency damping method / A. V. Proskurin // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1809. – IOP Publishing, 2021. – P. 012012.
15. *Proskurin, A. V.* Stability of magnetohydrodynamic flow around a circular cylinder / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Nov. – Vol. 1382. – P. 012033.
16. *Proskurin, A. V.* The evolution of non-linear disturbances in magnetohydrodynamic flows / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – July. – Vol. 1268. – P. 012062.

Публикации ВАК

17. *Проскурин, А. В.* Течение вязкой жидкости в деформируемой коаксиальной трубе / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2, 1 (85).
18. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения Озеена возле кругового цилиндра / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – 1-1 (77).
19. *Проскурин, А. В.* Численное моделирование устойчивости локализованных возмущений в течении Пуазейля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 3.
20. *Проскурин, А. В.* Локальные возмущения в течении Пуазейля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – Т. 2, 1(73). – С. 164-167.

21. *Проскурин, А. В. Устойчивость течения в трубе кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – Т. 2, 1(73). – С. 168-172.*
22. *Проскурин, А. В. Устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2011. – Т. 2, 1(69). – С. 164-167.*

Зарегистрированные программы для ЭВМ

23. *Проскурин, А. В. Метод дифференциальной прогонки / А. В. Проскурин. – 2015. – Свид. о рег. прогр. для ЭВМ №2015617814 от 22.07.2015.*
24. *Проскурин, А. В. Модуль графического интерфейса для управления вычислением собственных значений, нейтральных и критических зависимостей / А. В. Проскурин. – 2015. – Свид. о рег. прогр. для ЭВМ № 2015661276 от 22.10.2015.*
25. *Проскурин, А. В. Программа для вычисления матриц метода дифференциальной прогонки / А. В. Проскурин. – 2015. – Свид. о рег. прогр. для ЭВМ № 2015660887 от 12.10.2015.*
26. *Проскурин, А. В. Программа сортировки и упорядочения данных / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков. – 2013. – Свид. о рег. прогр. для ЭВМ № 2013619258.*
27. *Проскурин, А. В. Вычисление собственных значений задачи устойчивости плоского течения Пуазейля вязкой электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин. – 2011. – Свид. о рег. прогр. для ЭВМ № 2011613868.*
28. *Проскурин, А. В. Построение критических зависимостей / А. В. Проскурин. – 2011. – Свид. о рег. прогр. для ЭВМ № 2011613867.*

Публикации в других изданиях

29. *Проскурин, А. В. Режимы магнитогидродинамического течения в изогнутом канале / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Сборник тезисов докладов VII Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения". – Красноярск, 2020. – С. 152-155.*

30. *Проскурин, А.* Математическое моделирование неустойчивого течения в изогнутом канале при помощи метода выборочного подавления частот / А. Проскурин // Пермские гидродинамические научные чтения. – 2020. – С. 329-332.
31. *Proskurin, A. V.* Non-linear stability of magnetohydrodynamic flows / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // The book of abstract of 8th Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics, 16-19 July 2019, Limerick, Ireland. – Limerick, 2019. – P. 262.
32. *Проскурин, А. В.* Математическое моделирование ламинарно-турбулентного перехода в магнитогидродинамическом течении в расширяющемся канале. / А. В. Проскурин // материалы VI Всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения», Пермь, 26 – 29 ноября 2019. – Пермь, 2019. – С. 152-155.
33. *Проскурин, А. В.* Устойчивость магнитогидродинамического течения в канале с трехходовым расширением / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 2: Механика жидкости и газа. – Уфа, 2019. – С. 670-671.
34. *Проскурин, А. В.* Устойчивость магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Тезисы докладов всероссийской конференции «XXXV Сибирский теплофизический семинар». 27-29 августа 2019. – Новосибирск, 2019. – С. 46.
35. *Проскурин, А. В.* Эволюция нелинейных возмущений в магнитогидродинамических течениях / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Тезисы докладов всероссийской конференции и школы для молодых ученых, посвященных 100-летию академика Л.В. Овсянникова, 13–17 мая 2019. – Новосибирск, 2019. – С. 169-170.
36. *Proskurin, A. V.* A MHD flow in 90-degree bent channel / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Book of abstracts of Russian conference on Magnetohydrodynamics. June 18-21, 2018, Perm, Russia. – Perm : ICMM UB RAS, 2018. – P. 107.
37. *Проскурин, А. В.* Нелинейная устойчивость течения Гартмана / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // материалы V Всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения», Пермь, 26 – 29 сентября 2018. – Пермь, 2018.

38. *Проскурин, А.* Вторичные режимы магнитогидродинамического течения в изогнутой трубе / А. Проскурин, А. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2018. – 1 (99).
39. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течений в каналах при малых магнитных числах Рейнольдса / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: сборник тезисов 6-й Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. Барнаул, 7-11 августа 2017. – Барнаул, 2017. – С. 112.
40. *Проскурин, А. В.* Метод исследования устойчивости течений в трубах / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. – 1 (89).
41. *Proskurin, A. V.* A method for modelling MHD flows in pipes / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Book of abstracts of Russian conference on Magnetohydrodynamics. June 22-25, 2015, Perm, Russia. – Perm : ICMM UB RAS, 2015. – P. 84.
42. *Проскурин, А. В.* Математическое моделирование течений в трубах с помощью метода функций Рвачева / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20 – 24 августа 2015 г.) – Казань : Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 3134-3136.
43. *Проскурин, А. В.* Метод функций Рвачева в задачах гидродинамики / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 115-летию академика М.А.Лаврентьева, 7-11 сентября 2015, тезисы докладов. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, 2015. – С. 54.
44. *Проскурин, А. В.* Вейвлет-аппроксимация в задачах гидродинамической устойчивости / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 29 июня-4 июля 2014 года/ Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск : Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 85.
45. *Проскурин, А. В.* Метод функций Рвачева в задачах гидродинамической устойчивости / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 29 июня-4 июля 2014 года/ Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск : Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 84.

46. *Проскурин, А. В.* Устойчивость одного конвективного течения в круглой вращающейся трубе / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 29 июня-4 июля 2014 года/ Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск : Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 86.
47. *Проскурин, А. В.* О решении линейных задач устойчивости непараллельных течений / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов IV Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 5-10 июля 2011 года, Бийск. – Бийск : ИГиЛ СО РАН, 2011. – С. 83.
48. *Проскурин, А. В.* Устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов IV Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 5-10 июля 2011 года, Бийск. – Бийск : ИГиЛ СО РАН, 2011. – С. 84.
49. *Проскурин, А. В.* Исследование устойчивости течений в каналах методом коллокаций / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Неравновесные процессы в сплошных средах. Тезисы докладов всероссийской конференции молодых ученых. – Пермь, 2010.
50. *Проскурин, А. В.* Исследование устойчивости течений в каналах методом коллокаций / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Неравновесные процессы в сплошных средах. Материалы всероссийской конференции молодых ученых. – Пермь, 2010.
51. *Проскурин, А. В.* Устойчивость магнитогидродинамического течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Электронный физико-технический журнал. – 2010. – Т. 5. – С. 45-52.
52. *Проскурин, А. В.* О стабилизации течений электропроводящей жидкости продольным магнитным полем / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Электронный физико-технический журнал. – 2009. – Т. 4. – С. 1-11.
53. *Проскурин, А. В.* Об устойчивости течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов III международной конференции. 28 июня-3 июля 2008 года, Бийск. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, 2008. – С. 83.

54. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов III международной конференции. 28 июня-3 июля 2008 года, Бийск. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, 2008. – С. 83.
55. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течений электропроводящей вязкой жидкости в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // 15-я зимняя школа по механике сплошных сред. Т. 3. – Екатеринбург : УрО РАН, 2007. – С. 122-125.
56. *Проскурин, А. В.* Устойчивость МГД-течения слабо проводящей жидкости в канале кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник Томского гос. ун-та: бюллетень оперативной научной информации. – 2006. – № 64. – С. 64-68.
57. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения слабопроводящей жидкости в зазоре кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: тез. докл. международной конференции. – Новосибирск : ИГИЛ СО РАН, 2005. – С. 65-66.
58. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в канале кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник Томского гос. ун-та: бюллетень оперативной научной информации. – 2005. – № 44. – С. 42-46.
59. *Proskurin, A. V.* Stability of plasma flow between coaxial cylinders / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // International conference on Open Magnetic Systems for Plasma Confinement: abstracts. – Novosibirsk : INP SB RAS, 2004. – P. 86.
60. *Проскурин, А. В.* Образование ограниченных областей неустойчивости МГД-течений в каналах / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2004. – № 1. – С. 122-126.
61. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения между коаксиальными цилиндрами при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник Томского гос. ун-та: бюллетень оперативной научной информации. – 2004. – № 24. – С. 94-100.

62. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения электропроводящей жидкости в канале кольцевого сечения / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей: тез. докл. международной конференции. – Новосибирск : ИТПМ СО РАН, 2004. – С. 118-119.
63. *Проскурин, А. В.* О спектральной задаче Орра-Зоммерфельда / А. В. Проскурин // Международное совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений: тез. докл. – Новосибирск : ИВТ СО РАН, 2003. – С. 46.
64. *Проскурин, А. В.* Развитие МГД неустойчивости в канале кольцевого сечения / А. В. Проскурин // 13-я зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. – Пермь : УрО РАН, 2003.
65. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения проводящей жидкости в кольцевом зазоре при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2003. – № 1. – С. 91-94.
66. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения проводящей жидкости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник алтайского научного центра сибирской академии наук высшей школы. – 2003–2004. – № 6/7. – С. 68-73.

Ответственный за выпуск А.В. Проскурин

Подписано в печать 21.06.2023

Формат бумаги 60×84 1/16, Усл. печ. л. 1,8.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Тираж 150 экз. Заказ № 440.

Отпечатано в типографии Алтайского государственного университета:
656099, Алтайский край, г. Барнаул, ул. Димитрова, 66