

На правах рукописи

Шмагунов Олег Александрович

Учёт вязкости в методе дискретных вихрей с помощью
коррекции инвариантов движения

01.02.05 - механика жидкости и газа

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2008

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
с.н.с. Скобелев Б.Ю.

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор Черепанов А.Н.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Ильин В.П.

кандидат физико-математических наук,
с.н.с. Кудрявцев А.Н.

Ведущая организация: Институт гидродинамики
им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск

Защита состоится 6 июня 2008 г. в 9 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.035.02 в Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН по адресу:
630090, г. Новосибирск, ул. Институтская 4/1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИТПМ СО РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 2008 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета

Засыпкин И.М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача рассматривается в контексте проблемы моделирования турбулентных течений. Расчёт турбулентных течений по моделям, основанным на уравнениях Навье–Стокса, наталкивается на ряд ограничений. От них свободны методы дискретных вихрей. Последние являются мощными численными методами для моделирования несжимаемых течений жидкости. Поскольку они не требуют расчётных сеток, они позволяют существенно упростить численные алгоритмы и уменьшить влияние таких нежелательных эффектов как численная диффузия. Идеальные вихревые элементы достаточно хорошо описывают интегральные характеристики отрывных обтеканий различных летательных аппаратов и крупномасштабные турбулентные структуры. Для описания мелкомасштабной турбулентности необходимо принимать в расчёт вязкость. В настоящее время существуют различные подходы к этой проблеме, которые используют в той или иной форме уравнение вязкой диффузии завихренности. В данной работе используется новый подход, разработанный Б.Ю. Скобелевым и основанный на целенаправленной коррекции инвариантов течения идеальной несжимаемой жидкости, соответствующей заданной вязкости. Такой подход обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами.

Цель работы заключается в разработке такого численного метода, который позволял бы простыми средствами учитывать вязкость в методе дискретных вихрей и был свободен от недостатков других подходов, и проверке его эффективности на решении ряда известных задач.

Новизна работы заключается в следующем:

1. Впервые сформулирован численный метод и разработан алгоритм учёта вязкости в методе дискретных вихрей с помощью управления интегральными характеристиками течения.
2. Разработанный метод опробован на решении ряда известных задач, и показана его эффективность в моделировании как интегральных характеристик течения – таких как число Струхалия дорожки Кармана, так и локальных характеристик – таких как нелинейное развитие возмущений.
3. С помощью метода установлено, что динамика развития неустойчивых возмущений в плоской струе качественно совпадает с динамикой неустойчивости в пограничном слое.

Достоверность метода доказана многочисленными расчётами различных течений и их сравнением с экспериментальными данными, при котором наблюдается хорошее совпадение в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Данный подход расширяет возможности метода дискретных вихрей достаточно экономичными средствами, что обуславливает его **практическую**

ценность. Кроме того, он обеспечивает сохранение интегральных характеристик течения; благодаря компенсации погрешностей дискретизации и интегрирования, метод позволяет наблюдать в течениях такие тонкие эффекты как развитие возмущений – соответствующие результаты описаны в последней главе; позволяет моделировать начальную стадию развития турбулентности; и обобщается на трёхмерный случай, расширяя возможности для моделирования развитой турбулентности. Если подход окажется эффективным и в трёхмерном случае, он может послужить хорошей основой для построения замкнутой модели турбулентности.

К защите представляется численный метод расчёта двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости, основанный на коррекции координат и циркуляций точечных вихрей для выполнения интегральных законов сохранения движения системы идеальных точечных вихрей. В известной литературе нам не встречались какие-либо другие попытки подобного учёта вязкости. Прделанная работа представляет собой хороший задел для дальнейшего развития подхода, в частности его обобщения на трёхмерный случай. Подробнее основные результаты и выводы сформулированы в Заключении.

Апробация. Полученные результаты докладывались на семинарах ИТПМ СО РАН (Новосибирск) и представлялись на российских и международных конференциях: Международная конференция "Математические модели и численные методы механики сплошных сред" (Новосибирск, 1996); Второй Сибирский Конгресс по Прикладной и Индустриальной Математике (ИНПРИМ-96) (Новосибирск, 1996); The Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference (Париж, 1996); Saint-Venant Symposium (Париж, 1997); Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98) (Новосибирск, 1998); International Symposium "Actual Problems of Physical Hydroaerodynamics" (Новосибирск, 1999); Международная конференция "Математические модели и методы их исследования" (Красноярск, 1999); The First International Conference on Vortex Methods (Кобе, Япония, 1999); Конференция "Вычислительные технологии 2000" (Новосибирск, 2000); Конференция молодых учёных, посв. 10-летию ИВТ СО РАН (Новосибирск, 2000); Международная конференция, посв. 80-летию академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2001); Всероссийская конференция молодых учёных "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии" (Новосибирск, 2001); 33-й Региональная молодёжная конференция (Екатеринбург, 2002); IV Всероссийская конференция молодых учёных "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии" (Новосибирск, 2004); The Twelfth International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR'2004) (Новосибирск, 2004); Третья международная научно-практическая конференция "Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности" (Санкт-Петербург, 2007); Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ-2007 (Новосибирск, 2007)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах, в том числе 4 – в рецензируемых журналах и сборниках.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка литературы. Список литературы содержит 90 наименований. Объём диссертации 108 страниц.

Содержание работы

Во введении даётся описание основ и преимуществ метода дискретных вихрей, обзор его современного состояния и основных направлений развития, в общих чертах описывается предлагаемый подход. Приводится структура диссертации и кратко излагается её содержание.

В **Главе I** описывается современное состояние проблемы, математические и вычислительные проблемы, связанные с расчётами турбулентных течений по моделям, основанным на уравнениях Навье–Стокса, существующие подходы к моделированию вязкости в методах дискретных вихрей.

Известно, что уравнения Навье–Стокса выводятся в предположении гладких регулярных линий тока, гладких и сравнительно небольших градиентов завихренности и конечных масштабов движения, в то время как турбулентность характеризуется противоположными качествами. Таким образом, попытки описать турбулентность уравнениями Навье–Стокса ведут эти уравнения к границам их применимости, что и создаёт ряд проблем, например остаётся открытым вопрос существования глобальных решений для трехмерных течений (§1.3). Если допустить, что это решение существует, то возникает вопрос о размерности численной модели. В работах Foias С., Treve Y. (1981) и Foias С., Temam R. (1983) были получены оценки минимального числа N базисных функций, необходимых для корректного описания множества предельных решений уравнений Навье–Стокса. Оказалось, что для двумерных и трёхмерных течений соответственно $N \geq cRe^2$ и $N \geq cRe^6$. Учитывая, что турбулентные течения появляются при больших числах Рейнольдса, эти оценки дают основания для сильных сомнений в возможности прямых численных расчётов турбулентных течений с помощью уравнений Навье–Стокса. Если всё же допустить, что единственное глобальное решение существует, и есть достаточно мощный компьютер, реализующий численную модель уравнений Навье–Стокса требуемой размерности, её решение будет являться регулярной функцией пространственных координат, тогда как турбулентность обладает пространственной стохастичностью. Пространственная стохастичность проявляется, в частности, в виде перемежаемости энергии диссипации. Явление перемежаемости твёрдо установлено в экспериментах и служит одним из главных критериев правильности теории турбулентности.

В §1.2 проводится анализ различных гипотез возникновения турбулентности: Лере (1934), Ландау (1944) и Рюэля-Такенса (1971). При всех их

достоинствах, в них отсутствует механизм возникновения пространственной стохастичности, они либо недостаточно универсальны, либо не обеспечивают модели достаточной размерности. Эффект перемежаемости в принципе описывается в рамках подхода Колмогорова, однако найти её значение на основе численных расчётов уравнений Навье–Стокса не удалось.

Сложности возникают и при численном моделировании ламинарно-турбулентного перехода (§1.3). Несмотря на то, что при этом, по крайней мере на начальной стадии, множество предельных решений начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса имеет малую размерность, возникают проблемы со схемной вязкостью и появлением ложных осцилляций в потоке, которые приводят к существенным ошибкам в определении момента и места возникновения турбулентности, а также значительно искажает турбулентное поле скоростей.

Один из путей преодоления возникающих трудностей с математической моделью турбулентности на основе уравнений Навье–Стокса состоит в построении новой модели движения жидкости, включающей все нерегулярности, свойственные турбулентности, и основой для такой модели могли бы послужить вихревые методы. В самом деле, вихревые методы имеют дело с движением отдельных вихревых элементов. Система уже из четырёх вихрей обладает как временной, так и пространственной стохастичностью. С другой стороны, вихревые методы основаны на конечномерной динамической системе, описывающей движение вихревых элементов, следовательно сложные проблемы дискретизации уравнений в частных производных здесь не возникают, но есть проблема учёта вязкости.

Обзору существующих подходов к учёту вязкости в методах дискретных вихрей посвящён §2. В настоящее время существуют различные подходы к решению этой проблемы, которые используют в той или иной форме уравнение вязкой диффузии завихренности. Их можно разделить на две группы: метод случайных блужданий (random walk), концепция которого была предложена Chorin A.J. (1973), и детерминистические методы. Метод случайных блужданий популярен и успешно применяется во многих ситуациях. Однако, этот метод имеет большие стохастические погрешности, возникающие в расчёте вязкости. Что касается детерминистических методов, метод гауссового распределённого ядра (Gaussian core-spreading method), который основан на решении уравнения теплопереноса, изучался Greengard C. (1985), и было показано, что этот алгоритм сходится к системе уравнений, отличающихся от уравнений Навье–Стокса. В этом методе завихренность корректно диффундирует, но её конвекция описывается некорректно, даже в пределе бесконечного количества вихрей. Cottet G.H. et al. (1988) предложили подход, альтернативный алгоритму распределённого ядра и основанный на том, что веса вихревых частиц меняются на каждом шаге по времени без изменения их положений, так что выполняется закон сохранения завихренности. Rossi

(1996) был предложен новый детерминистический подход, использующий адаптивную пространственную детализацию, и установлена его равномерная сходимости. Таким образом, проблемы существующих подходов к учёту вязкости решаемы, но все они требуют решения сложных уравнений, что значительно усложняет классический метод дискретных вихрей для идеальной жидкости. В данной работе предлагается новый подход, разработанный Б.Ю. Скобелевым, который берёт за основу классический метод и сводит учёт вязкости к вычислению на каждом шаге по времени некоторых поправок к координатам и циркуляциям идеальных дискретных вихрей. В результате, метод оказывается намного проще с вычислительной точки зрения, но в то же время хорошо воспроизводит основные глобальные и локальные характеристики течения.

В Главе II содержится подробное описание метода, гипотезы, положенные в его основу, расчёт вязких поправок и разработанный численный алгоритм для расчёта конкретных течений жидкости и газа.

В §1 приводятся уравнения движения двумерной системы идеальных точечных вихрей и приводятся инварианты движения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \quad j \neq i, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_i, y_i, Γ_i – координаты и циркуляция i -го вихря, $i \neq j$, N – число вихрей. Система уравнений (1) может быть записана в гамильтоновой форме:

$$\Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

с гамильтонианом H :

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Гамильтониан (3) не меняется при трансляциях и вращениях системы координат, что обуславливает существование следующих интегралов движения:

$$X = \sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i, \quad Y = \sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i, \quad L^2 = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (4)$$

Регуляризация уравнений движения достигается введением радиуса дискретизации r_0 , и для $r < r_0$ индуцированная вихрем скорость считается убывающей по некоторому степенному закону до нуля на оси вихря. Это несколько видоизменяет вид уравнений движения, но не вносит диссипации в систему точечных вихрей. Система по-прежнему остаётся гамильтоновой системой, и величины X , Y , L^2 остаются инвариантами.

В §2 показывается, как инварианты X , Y , L^2 можно использовать для коррекции схемной вязкости. Для этого введём масштабы длины L^* и циркуляции Γ^* и перейдём к новым переменным

$$\tilde{\Gamma}_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma^*}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L^*}, \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{L^*}. \quad (5)$$

Рассмотрим инварианты перенормированной системы уравнений:

$$h = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j \ln \tilde{r}_{ij}, \quad l^2 = \sum_{i=1}^N \tilde{\Gamma}_i \tilde{r}_i^2, \quad (6)$$

где

$$\tilde{r}_{ij} = \left[(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2 \right]^{1/2}, \quad \tilde{r}_i = (\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2)^{1/2}.$$

При точном решении величины h и l^2 должны сохраняться, однако при численном интегрировании они будут меняться во времени:

$$\begin{aligned} \Delta h_{n+1} &= h_{n+1} - h_n \neq 0, \\ \Delta l^2_{n+1} &= l^2_{n+1} - l^2_n \neq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $n=1,2,3\dots$ и Δt – временной шаг численного интегрирования.

Для того, чтобы сохранить неизменными исходные инварианты H и L^2 , начнём варьировать масштабы Γ^* и L^* во времени. С физической точки зрения это означает, что дискретизация уравнений движения эквивалентна переходу в некоторую неинерциальную систему отсчёта, поэтому результаты численного расчёта необходимо скорректировать, то есть преобразовать в исходную неподвижную систему отсчёта. Для определения вида преобразований потребуем

$$\begin{aligned}\Delta H &= H_{n+1} - H_n = 0, \\ \Delta L^2 &= L_{n+1}^2 - L_n^2 = 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Или, используя (3) и (4):

$$\begin{aligned}\Delta H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \Gamma_{i,n+1} \Gamma_{j,n+1} \ln r_{ij,n+1} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^N \Gamma_{i,n} \Gamma_{j,n} \ln r_{ij,n} = 0, \\ \Delta L^2 &= \sum_{i=1}^N \Gamma_{i,n+1} r_{i,n+1}^2 - \sum_{i=1}^N \Gamma_{i,n} r_{i,n}^2.\end{aligned}\tag{9}$$

Подставим новые переменные из (5), используем (6) и учтём, что $\tilde{\Gamma}_{i,n+1} = \Gamma_{i,n}$ и $\tilde{\Gamma}_{j,n+1} = \Gamma_{j,n}$, поскольку численное интегрирование уравнений движения не меняет циркуляции. Кроме того, положим $\Gamma_n^* = 1, L_n^* = 1, \Gamma_{n+1}^* \equiv \Gamma^*, L_{n+1}^* \equiv L^*$. В результате получаем систему уравнений на определение Γ^* и L^* :

$$\begin{cases} (\Gamma^*)^2 \left[h_{n+1} - \frac{1}{4\pi} \ln L^* \sum_{i,j=1}^N \Gamma_{i,n} \Gamma_{j,n} \right] - h_n = 0, \\ \Gamma^* (L^*)^2 l_{n+1}^2 - l_n^2 = 0. \end{cases}\tag{10}$$

В итоге численный алгоритм выглядит следующим образом. На n -м слое по времени вычисляются величины h_n, l_n^2 , выполняется численное интегрирование уравнений движения (1), находятся новые координаты \tilde{x}_i, \tilde{y}_i и вычисляются величины h_{n+1}, l_{n+1}^2 . Далее, численно решается система уравнений (10), например из второго уравнения выражается Γ^* и подставляется в первое, которое решается методом итераций. Поскольку величины Γ^* и L^* близки к единице, удобно вместо них использовать величины $\Delta\Gamma, \Delta L$:

$$\Delta\Gamma = \Gamma^* - 1, \quad \Delta L = L^* - 1.\tag{11}$$

Тогда, новые значения координат и циркуляций находятся как

$$\begin{aligned}x_{i,n+1} &= (1 + \Delta L) \tilde{x}_{i,n+1}, \\ y_{i,n+1} &= (1 + \Delta L) \tilde{y}_{i,n+1}, \\ \Gamma_{i,n+1} &= (1 + \Delta\Gamma) \Gamma_{i,n}.\end{aligned}\tag{12}$$

и используются в качестве начальных значений для следующего шага. Из способа построения преобразования (12) следует, что инварианты H и L^2 , выраженные через преобразованные координаты, сохраняются.

В §3 вышеописанный подход используется для моделирования физической вязкости. Для этого находятся выражения величин H , L^2 , X и Y для вязкой жидкости и определяется их зависимость от времени.

В §3.1 и §3.2 находятся выражения зависимости изменения энергии течения E и дисперсии L^2 от вязкости и формулируются две гипотезы, лежащие в основе метода.

В двумерных течениях покоящейся на бесконечности невязкой жидкости энергия W и дисперсия L^2 записываются как

$$W = -\frac{\rho}{4\pi} \iint_{S_0} \omega \omega' \ln|r - r'| dS dS', \quad L^2 = \int_{S_0} \omega(x^2 + y^2) dS, \quad (13)$$

где ρ – плотность, $\omega \equiv \omega(x, y)$, $\omega' = \omega'(x', y')$ – распределения завихренности, $r = (x, y)$, dS – элемент площади, и интегралы берутся по всей области течения S_0 .

После перехода от непрерывного распределения завихренности к дискретному получаем дискретные аналоги инвариантов (13):

$$E = \rho \left[\frac{5}{32\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 - \frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln|r_i - r_j| \right], \quad L^2 = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (14)$$

где E – регулярная часть энергии завихренности W . Под действием вязкости они изменяются как

$$\frac{dE}{dt} = -\mu \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2, \quad \frac{dL^2}{dt} = 0. \quad (15)$$

Можно показать, что координаты центра завихренности X , Y по прежнему сохраняются.

Уравнения (15) описывают изменение инвариантов движения идеальных вихрей под действием вязкости. С другой стороны, дискретизация уравнений (2) и их интегрирование ведёт к появлению погрешностей, что вызывает неконтролируемые изменения E и L^2 в численных расчётах. Чтобы использовать условия (15) для моделирования вязкости и компенсации погрешностей счёта, примем следующие две гипотезы:

1. Движение системы идеальных точечных вихрей моделирует вязкое течение, если регулярная часть энергии завихренности E удовлетворяет уравнению (14).
2. И дискретизация завихренности (переход от непрерывного распределения к точечным вихрям), и дискретизация уравнений движения (2) эквивалентны переходу в некоторую неинерциальную систему координат. Следовательно, для получения результатов в исходной, физической системе координат необходимо выполнять обратное преобразование координат и времени после каждого шага численного интегрирования уравнений движения. Эти преобразования определяются условиями (15).

Рассмотрим конечно-разностные формы уравнений (15):

$$\Delta E = -\nu \Delta t \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2, \quad \Delta L^2 = 0, \quad (16)$$

где ν – кинематическая вязкость. Это даёт нам искомые поправки к условию (8):

$$\begin{aligned} \Delta E &= H_{n+1} - H_n = -\nu \Delta t \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2, \\ \Delta L^2 &= L_{n+1}^2 - L_n^2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Напомним, что $\tilde{x}_{i,n+1}, \tilde{y}_{i,n+1}$ обозначают у нас координаты i -го вихря, полученные на $(n+1)$ -м шаге интегрирования уравнений (2), а $\Gamma_{i,n}$ – соответствующее значение циркуляции (оно не меняется при переходе с n -го на $(n+1)$ -й слой по времени). Переход в физическую систему координат выполняется при помощи преобразований (12), а система уравнений (10) для нахождения поправок $\Delta L_{n+1}, \Delta \Gamma_{n+1}$ преобразуется в

$$\begin{cases} (1 + \Delta \Gamma)^2 \left[h_{n+1} - \frac{1}{4\pi} \ln(1 + \Delta L) \sum_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_{\alpha,n} \Gamma_{\beta,n} \right] - h_n = -\nu \Delta t \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2, \\ (1 + \Delta \Gamma)(1 + \Delta L)^2 l_{n+1}^2 - l_n^2 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Как и в предыдущем параграфе, можно выразить из второго уравнения $1 + \Delta \Gamma$, подставить в первое и полученное нелинейное уравнение на $1 + \Delta L$ решать методом итераций. После преобразований (12) мы получаем величины координат и циркуляций идеальных точечных вихрей, моделирующих течение с заданной кинематической вязкостью ν .

В §4 описывается численный алгоритм, реализующий разработанный подход для учёта вязкости в двумерных течениях. Условно его можно разделить на два этапа, на первом из которых выполняется интегрирование уравнений движения и находятся координаты вихрей на новом слое по времени, а на втором из системы уравнений (18) находятся вязкие поправки ΔL_{n+1} , $\Delta \Gamma_{n+1}$ и проводится соответствующая коррекция координат и циркуляций. Приводится схема алгоритма с комментариями.

В **Главе III** описывается численный расчёт свободных течений (система четырёх вихрей, вихревое пятно) и течений в областях с границами (обтекание пластины, плоская струя). Приводятся полученные результаты, их сравнение с теорией и данными экспериментов.

В §1 собраны результаты моделирования течений со свободной границей: система четырёх вихрей и вихревое пятно.

В §1.1 было исследовано влияние вязкости на систему из четырёх дискретных вихрей с тремя вихрями равномерно распределёнными по окружности и одним в центре, впервые изученную Новиковым. Показано, что в отсутствие вязкости движение вихрей стохастично, и их траектории заполняют собой почти весь круг. Если добавить небольшую вязкость, движение остаётся стохастичным, но траектории с течением времени формируют кольцо. К сожалению, в данной задаче алгоритм вязкой корректировки эффективно работает лишь для вязкости $\nu \leq 5 \cdot 10^{-4}$ и небольших времён. При большей вязкости и больших значений t расчёт расходится, что связано с малым количеством вихрей и трудностью учёта диффузии завихренности из области течения. Эта трудность была преодолена в следующей задаче.

В §1.2 рассматривается круговая вихрь единичного радиуса с равномерно распределённой завихренностью и циркуляцией $\Gamma_0 = 1$ (вихрь Ренкина). Он заменяется системой равномерно распределённых точечных вихрей. В этой задаче завихренность, диффундировавшая из области вихревого пятна на бесконечность, была учтена с помощью виртуального вихря, помещённого в область завихренности и обеспечивающего выполнение закона сохранения полной завихренности и закона сохранения координат центра завихренности. Такой подход позволил избежать проблем, возникших в предыдущей задаче.

В §2 описывается численное моделирование течений при наличии твёрдых границ. Учёт влияния твёрдых границ представляет собой некоторую проблему. В отсутствие вязкости достаточно выполнения условия непротекания:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

где \mathbf{u} – вектор скорости, \mathbf{n} – вектор нормали к границе, $\partial\Omega$ – граница области. В вязком случае, при моделировании течения уравнениями Навье–Стокса, граничное условие меняется на условие прилипания

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (19)$$

и представляет собой определённую сложность для моделирования. В данных вычислениях в качестве некоторого приближения используется условие непротекания, реализация которого будет более подробно описана в следующем параграфе. При дальнейшем развитии метода предполагается моделировать границу двумя рядами вихрей.

В §2.1 описывается метод моделирования границ, используемый во многих исследованиях, в частности проведённых группой С.М. Белоцерковского. Граница делится на n участков. Неподвижные вихри Γ_i помещаются в середины участков, а контрольные точки T_i – на их концах. Точки отрыва свободных вихрей от кромок располагаются на касательных к профилю линиях на расстояниях, равных половине длины участка. В результате такого разбиения все контрольные точки оказываются посередине между соседними неподвижными дискретными вихрями, а крайние из них – на кромках профиля:



Рис. 1. Моделирование границы.

Безразмерные координаты дискретных вихрей и контрольных точек для плоской пластины будут равны

$$x_{\Gamma_i} = \frac{i-1/2}{n}, \quad i = 0, \dots, n+1$$

$$x_{T_i} = i/n, \quad i = 0, \dots, n$$

Этот метод учёта границ был использован и в данной работе.

§2.2 содержит описание и результаты моделирования обтекания плоской пластины потоком вязкой жидкости с постоянной скоростью U_0 . Пластина замещается системой неподвижных точечных вихрей, как было описано в предыдущем параграфе. Точки отрыва свободных вихрей располагаются на фиксированном расстоянии от краёв пластины. Два свободных вихря порождаются перед каждым шагом интегрирования уравнений движения. Циркуляции неподвижных и свободных вихрей определяются из двух условий: условие непротекания в контрольных точках, расположенных между неподвижными вихрями и на краях пластины, и равенства нулю полной циркуляции. Таким образом, есть два типа вихрей в задаче перед переходом к $(n+1)$ -

му шагу по времени: N_0 неподвижных вихрей и $2n$ свободных вихрей. Свободные вихри движутся в соответствии с уравнениями (1), дополненными вкладом от неподвижных вихрей и внешнего течения:

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_0} \Gamma_{Si} r_{ij} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2n} \Gamma_{\sigma j} r_{ij}.$$

Условие непротекания в контрольных точках, гипотеза Чаплыгина-Жуковского на обеих кромках профиля и условие равенства нулю суммарной циркуляции дают нам систему уравнений для определения неизвестных циркуляций неподвижных вихрей Γ_{Si} ($i = 1, \dots, N_0$), а также двух новых вихрей, сходящих с кромок профиля:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_0} w_{Si}(T_{Sj}) \Gamma_{Si} + \sum_{i=1}^{2n} w_{\sigma i}(T_{Sj}) \Gamma_{\sigma i} &= 0, \quad j = 1, \dots, N_0 \\ \sum_{i=1}^{N_0} \Gamma_{Si} + \sum_{i=1}^{2n} \Gamma_{\sigma i} &= 0 \end{aligned}$$

где $w_{Si}(T_{Sj})$ и $w_{\sigma i}(T_{Sj})$ – нормальные составляющие безразмерной скорости в контрольных точках T_{Sj} от вихрей Γ_{Si} и $\Gamma_{\sigma i}$ соответственно. Определение положения свободных вихрей производится интегрированием уравнений движения (1).

Преобразования координат и циркуляций, описанные в предыдущей главе, выполняются на каждом шаге по времени, начиная с некоторого слоя n_0 , перед порождением двух новых вихрей. При этом принимается во внимание, что N свободных вихрей, находящихся на $(n+1)$ -м временном слое ($N = 2n + 2$), движутся во внешнем поле скорости, порождаемом набегающим потоком и неподвижными вихрями. Влияние внешней скорости U_0 исключается переходом в систему координат, движущуюся с внешним потоком.

Скорость $U = (U_x, U_y)$, порождённая неподвижными вихрями, приводит к дополнительным изменениям в энергии E и величине L^2 . На интервале времени $\Delta \tilde{t}$ эти изменения имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta \tilde{t} \sum_{i=1}^N \Gamma_i (u_{xi} U_{yi} - u_{yi} U_{xi}) \\ \Delta L^2 &= \Delta \tilde{t} \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i U_{xi} + y_i U_{yi}) \end{aligned}$$

где U_i – величина U в точке i -го вихря, а u_i – скорость, наведённая в этой точке всеми свободными вихрями, исключая i -й вихрь. Соответствующие вклады от неподвижных вихрей вычитаются из величин l_{n+1}^2, e_{n+1} до определения параметров преобразования.

В численном моделировании пластина замещалась $N_0 = 20$ неподвижными вихрями. Точки отрыва свободных вихрей располагались на расстояниях $1/2N_0$ от краёв пластины. Результаты показали, что предлагаемый метод учёта вязкости хорошо моделирует вихревую дорожку Кармана и зависимость числа Струхалиа Sh от числа Рейнольдса Re . Примеры вихревых дорожек Кармана в момент $t = 70$ приведены для $Re = 100$ на Рис. 2 и для $Re = 1000$ на Рис. 3

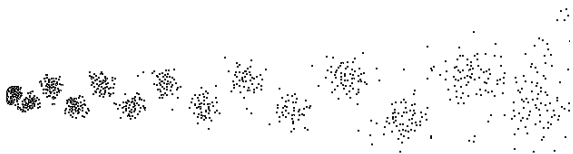


Рис. 2. Вихревая дорожка Кармана при $t = 70$ и $Re = 100$.



Рис. 3. Вихревая дорожка Кармана при $t = 70$ и $Re = 1000$.

Сравнение значений числа Струхалиа Sh с экспериментальными данными в диапазоне $50 \leq Re \leq 1000$ показано на Рис. 4.



Рис. 4. Зависимость числа Струхалиа от числа Рейнольдса и сравнение с экспериментальными данными.

Сплошные линии показывают экспериментальную зависимость Sh от Re ; кружки обозначают результаты численного моделирования.

§2.3 показывает применимость предлагаемого метода к исследованию влияния вязкости на аэродинамические характеристики пластины. Описан численный расчёт коэффициента c_n нормальной силы и безразмерной координаты x_d центра давления при различных углах атаки и числах Рейнольдса.

§2.4 посвящён моделированию плоской струи, вытекающей из сопла в затопленное пространство. Расчётная область представляет собой сопло, состоящее из двух параллельных друг другу стенок, длиной $L_s=4,5$, отстоящих на расстоянии $2R_s=2$ друг от друга. Стенки сопла моделировались двумя системами из $N=30$ равноотстоящих точечных вихрей $\Gamma_{1Si}, \Gamma_{2Si}$ и расположенных посередине между ними контрольных точек T_{1Si}, T_{2Si} :

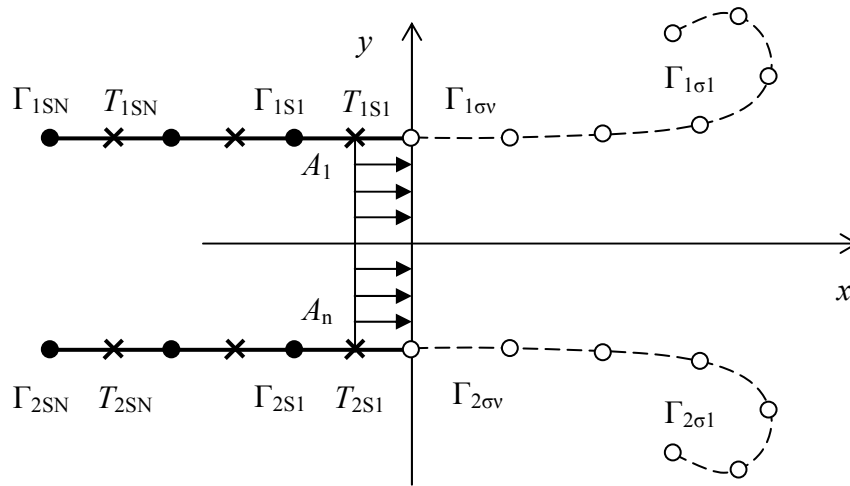


Рис. 5. Моделирование плоской струи.

В каждый момент времени на кромках сопла образуется два новых вихря $\Gamma_{1Sv}, \Gamma_{2Sv}$, которые начинают перемещаться в поле скоростей, наведенном всей системой вихрей. Необходимо определить циркуляции вихрей на стенках, а также циркуляции двух новых вихрей. Имеется условие непротекания в контрольных точках, которое даёт $2N$ уравнений:

$$\sum_{k=1}^2 \left[\sum_{i=1}^N w_{kSi}(T_{lSj})\Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^v w_{k\sigma i}(T_{lSj})\Gamma_{k\sigma i} \right] = 0, \quad l=1,2, \quad j=1,N \quad (20)$$

где $w_{kSi}(T_{lSj})$ и $w_{k\sigma i}(T_{lSj})$ – нормальные составляющие безразмерной скорости в контрольных точках T_{lSj} от вихрей Γ_{kSi} и $\Gamma_{k\sigma i}$ соответственно. Ещё одно уравнение получается из условия сохранения суммарной циркуляции:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^v \Gamma_{k\sigma i} \right) = 0 \quad (21)$$

И замыкается система уравнением расхода через сопло:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^N w_{xkSi} (A_j) \Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^v w_{xk\sigma i} (A_j) \Gamma_{k\sigma i} \right) \Delta S_j = Q(\tau_v) \quad (22)$$

n – количество точек в сечении сопла, интегрированием по которым насчитывался выходной поток. В расчётах $n=10$.

Из решения системы находятся циркуляции всех вихрей, что позволяет рассчитать скорости в точках расположения свободных вихрей и найти их новые координаты интегрированием уравнений:

$$\frac{dx_{k\sigma i}}{d\tau_v} = w(\Gamma_{k\sigma i}), \quad \frac{dy_{k\sigma i}}{d\tau_v} = w(\Gamma_{k\sigma i}) \quad (23)$$

В расчётах шаг по времени $\Delta t = 0,2$.

Как и в случае моделирования обтекания пластины, после каждого шага интегрирования выполняется вязкая коррекция координат и циркуляций свободных вихрей (12) с предварительной поправкой инвариантов на внешнюю скорость. Для ускорения счёта применялась процедура попарного объединения вихрей, удалившихся от сопла на достаточно большое расстояние.

На Рис. 6 приведена характерная картина течения для вязкости 0,001 и безразмерного времени 80. На Рис. 7 – сравнение профиля продольной составляющей средней скорости с другим расчётом и экспериментом. По оси абсцисс (вверху) отложено расстояние от среза сопла, внизу – амплитуда скорости. По оси ординат - расстояние от оси струи. Вязкость – $3,74 \cdot 10^{-5}$; «o» – расчёт, «+» – расчёт Shimizu S. (1986) без учёта вязкости, «●» – эксперимент Hussain A.K.M.F., Thompson C.A. (1980). Видно, что вязкая коррекция смещает результаты расчёта по сравнению с классическим методом дискретных вихрей в сторону большего соответствия эксперименту.



Рис. 6. Характерная картина течения.

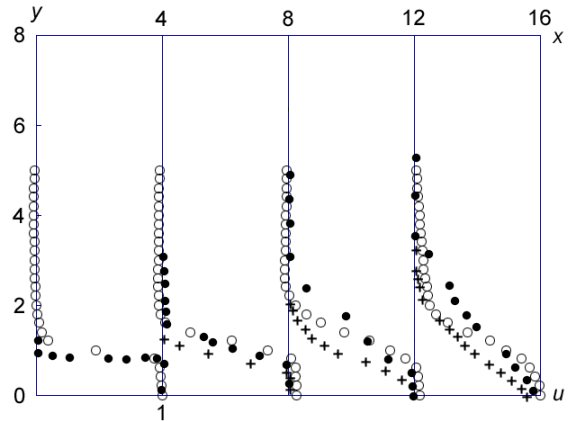


Рис. 7. Профиль средней скорости.

Расчёты показали, что, независимо от числа Рейнольдса, струю можно разбить на три характерные области: $0 < x < 8$ - начальная (струйный профиль ещё не сформировался, и течение, по сути, состоит из двух слоёв сдвига); $8 < x < 12$ - ламинарная; $x > 12$ - турбулентная. В ламинарной области численные расчёты полуширины струи и профиля продольной скорости хорошо совпадают с теоретическими результатами. На рис. 8 приведен профиль продольной скорости при $x = 10$ и вязкости 0,001 и его аппроксимация (пунктир) по теоретической формуле

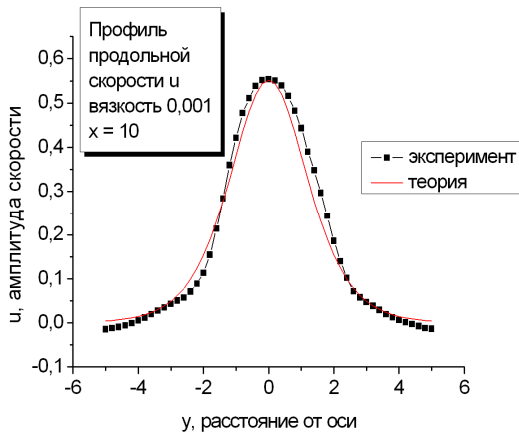


Рис. 8. Профиль продольной скорости.

$$u = 6\nu\alpha^2 (x + x_0)^{-1/3} \operatorname{sch}^2(\alpha\eta),$$

где

$$\eta = \frac{y}{(x + x_0)^{2/3}}, \quad \alpha = \frac{F}{48\nu^2},$$

$$F = 0,65, \quad x_0 = 24.$$

В заключительной части исследования, описанной в §2.5, ставилась цель проследить нарастание возмущений, вызывающих переход одной области течения в другую. Для этого на оси на различном удалении от среза сопла измерялись пульсации продольной скорости и исследовался их спектр. Если посмотреть отдельные гармоники в начальной области, то видно, что сначала они растут экспоненциально в соответствии с линейной теорией устойчиво-

сти, затем наступает стадия нелинейного развития, характеризующаяся замедлением роста и появлением субгармоник (Рис. 9).

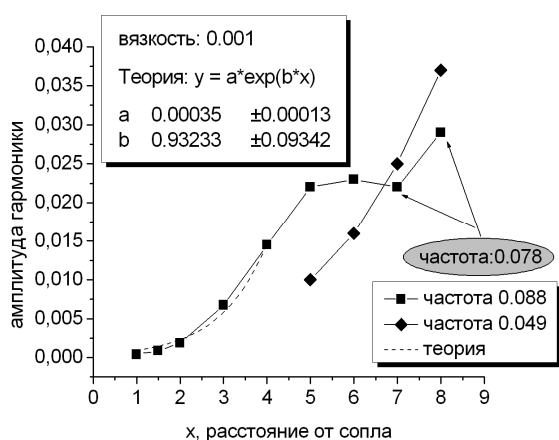


Рис. 9. Экспоненциальный рост гармоник, стабилизация и появление субгармоник.

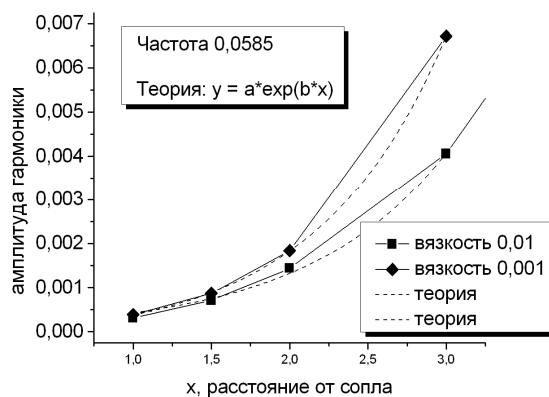


Рис. 10. Сравнение роста гармоник для вязкостей 0,01 и 0,001. Большой вязкости соответствует меньший инкремент нарастания.

При экспоненциальной аппроксимации амплитуд гармоник видно, что большей вязкости соответствует меньший инкремент нарастания (Рис. 10), что опять-таки находится в согласии с линейной теорией. Аналогичная картина наблюдается в области ламинарно-турбулентного перехода при $8 < x < 12$ (Рис. 11).

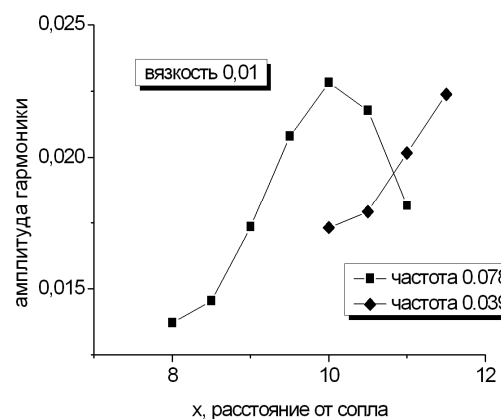


Рис. 11. Появление гармоник при $8 < x < 12$, вязкость 0,01.

Надо отметить, что в отличие от погранслоя, где сначала выделяется одна нарастающая волна Толмина-Шлихтинга, для начального участка струи характерен целый спектр практически одновременно нарастающих гармоник. Этот результат находится в полном соответствии с линейной теорией гидродинамической устойчивости. Известно, что линейная нейтральная кривая для погранслоя имеет ярко выраженный «носик», в то время как сдвиговые слои в начальном участке струи неустойчивы при всех числах Рейнольдса. При $Re \rightarrow \infty$ это неустойчивость Рэлея (невязкая неустойчи-

вость), а неустойчивость при конечных Re и при $Re \rightarrow 0$ была получена численно в работе Бетчова Р. и Криминале В. (1971).

Содержание **Глава II-III** представляется к защите.

В **Заключении** приведены основные результаты и выводы диссертации.

1. Впервые сформулирован метод, позволяющий моделировать начальную стадию развития турбулентности в двумерных течениях вязкой несжимаемой жидкости с помощью управления интегральными характеристиками течения. На основе этого метода создан численный алгоритм расчёта двумерных течений вязкой жидкости.
2. С помощью предложенного метода показана возможность влиять на эволюцию свободных течений, в частности на стохастичность движения вихрей. При этом, характер влияния соответствует заданной вязкости.
3. На примере численных расчётов обтекания плоской пластины под различными углами атаки и истечения плоской струи в затопленное пространство показано хорошее согласие численных результатов с известными экспериментальными данными.
4. На основе детального изучения потери устойчивости в начальном участке струи как в ламинарной, так и в нелинейной стадии развития возмущения установлено, что динамика развития неустойчивых возмущений качественно совпадает с динамикой неустойчивости в пограничном слое.
5. Показано, что разработанный метод успешно моделирует как интегральные, так и локальные характеристики ламинарных течений и начальной стадии развития турбулентности. Аналогичный подход может быть развит для анализа трёхмерных течений и моделирования развитой турбулентности.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Белоцерковский С.М., Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Моделирование течений вязкой жидкости движением дискретных вихрей // Международная конференция «Математические модели и численные методы механики сплошных сред»: Тезисы докладов. Новосибирск, 1996. С. 153.
2. Белоцерковский С.М., Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Новый подход к моделированию вязкости в методе дискретных вихрей // Второй Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-96): Тезисы докладов. Новосибирск, 1996. С. 210–211.
3. Belotserkovsky S.M., Scobelev B.Yu., Shmagunov O.A. Viscosity simulation in the method of discrete vortices // Computational Fluid Dynamics'96: Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference. Paris, 1996. P. 791–796.
4. Scobelev B.Yu., Shmagunov O.A. New method of viscosity simulation in a system of discrete vortices // Proceedings of Saint-Venant Symposium. Paris, 1997. С.133–140.
5. Scobelev B. Yu., Shmagunov O. A. A new approach to the modeling viscous diffusion in vortex element methods // Fluid Mechanics and Its Applications. Vol.44 / Ed. E. Krause and K. Gersten. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, P. 95–104.
6. Скобелев Б. Ю., Шмагунов О. А. Принципиальные трудности описания турбулентности уравнениями Навье – Стокса и метод дискретных вихрей // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): Тезисы докладов. Ч. II. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1998. С. 122.
7. Скобелев Б. Ю., Шмагунов О. А. Анализ эффективности уравнений Навье – Стокса для описания турбулентных течений // Международная конференция «Математические модели и методы их исследования»: Тезисы докладов. Красноярск, 1999. С. 186.
8. Scobelev B. Yu., Shmagunov O.A. Principal difficulties of turbulence description by Navier – Stokes equations and vortex methods // Proceedings of the First International Conference on Vortex Methods. Kobe, 1999. P. 23–30.

9. Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Численный расчет турбулентных характеристик плоской струи методом дискретных вихрей [Электронный ресурс] // XVII школа-семинар по численным методам механики вязкой жидкости «Вычислительные технологии 2000»: Тезисы докладов. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2000. Режим доступа:
http://www.ict.nsc.ru/ws/show_abstract.dhtml?8+624
10. Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Численный расчёт турбулентных характеристик плоской струи методом дискретных вихрей [Электронный ресурс] // Конференция молодых учёных, посв. 10-летию ИВТ СО РАН: Тезисы докладов. Режим доступа:
http://www.ict.nsc.ru/ws/show_abstract.dhtml?ru+9+1212
11. Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Проблема учёта вязкости в методах дискретных вихрей // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, ч. 2. С. 563–569.
12. Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Численный расчёт турбулентных характеристик плоской струи методом дискретных вихрей // Труды Конференции молодых учёных, посв. 10-летию ИВТ СО РАН. Новосибирск, 2001. С. 140–144.
13. Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Расчёт течений вязкой жидкости методом дискретных вихрей // Всероссийская конференция молодых учёных "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии": Тезисы докладов. Новосибирск, 2001. С. 43.
14. Шмагунов О.А. Метод дискретных вихрей: проблема учёта вязкости // Труды 33-й Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург, 2002, С. 200–204. [Рецензируемый сборник.]
15. Шмагунов О.А. Нелинейное нарастание возмущений в плоской струе // IV Всероссийская конференция молодых учёных "Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии": Тезисы докладов. Новосибирск, 2004. С. 42.
16. Shmagunov O.A. Nonlinear disturbance growth in a plain jet // International Conference on the Methods of Aerophysical Research: Proceedings. Pt. IV. Novosibirsk, 2004. P. 285–290.
17. Шмагунов О.А. Исследование развития течения в плоской струе методом дискретных вихрей // Труды Третьей международной научно-практической

кой конференции “Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности“. Санкт-Петербург, 2007. С. 162–163.

18. Шмагунов О.А. Применение метода дискретных вихрей к анализу развития течения в плоской струе [Электронный ресурс] // Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ-2007: Тезисы докладов. Новосибирск, 2007. Режим доступа:
http://www.sbras.ru/ws/show_abstract.dhtml?ru+164+12019
19. Скобелев Б.Ю., Шмагунов О.А. Новый подход к моделированию вязкости в методе дискретных вихрей // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 5. С. 116–125.

Ответственный за выпуск
О.А. Шмагунов

Подписано в печать 21.04.2008
Формат бумаги 60 × 84/16, Усл. печ. л. 1.0,
Уч.-изд. л. 1.0, Тираж 100 экз., Заказ № 3

Отпечатано на ризографе ЗАО "ИНТЕРТЕК"
630090, Новосибирск, Институтская, 4/1