

ЕФИМОВА МАРИНА ВИКТОРОВНА

**УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ
И ТЕЧЕНИЙ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ
В ПЛОСКИХ СЛОЯХ**

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Красноярск — 2008

Работа выполнена в Институте вычислительного моделирования СО РАН
(г. Красноярск)

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
профессор В.К. Андреев

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук,
профессор В.М. Белолипецкий
доктор физико-математических наук,
профессор Григорьев Ю.Н.

Ведущая организация: Институт гидродинамики
им. М.А. Лаврентьева СО РАН ,
г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 26 сентября 2008 г. в 14.00 часов на заседа-
нии диссертационного совета Д 003.035.02 при Институте теоретической и
прикладной механике им. С.А. Христиановича СО РАН по адресу: 630090,
Новосибирск, ул.Институтская 4/1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИТПМ им. С.А. Христи-
ановича СО РАН

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный гербовой печатью
учреждения, просим направлять по адресу: 630090, г.Новосибирск-90,
ул.Институтская, 4/1, ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН, ученому сек-
ретарю диссертационного совета Д 003.035.02.

Автореферат разослан 20 августа 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д. т. н.

Засыпкин И.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Среди множества моделей, используемых в механике жидкости и газа, можно выделить так называемые *классические модели*, к которым относятся уравнения газовой динамики, уравнения Эйлера, Навье–Стокса, Обербека–Буссинеска, пограничного слоя Прандтля. В последнее время в связи с появлением новых задач, развитием математического аппарата и средств вычислительной техники возрос интерес к *неклассическим моделям гидродинамики*. Такие усложненные модели с большей точностью (по сравнению с классическими) описывают реальные физические процессы и в последнее время активно используются в вычислительной гидродинамике. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования подмоделей усложненных моделей. В частности, точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве “тестовых задач” для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов, а также имеют чрезвычайно важное значение при изучении устойчивости течений.

В условиях, близких к невесомости, существенное влияние на устойчивость равновесия и движения жидкостей с поверхностью раздела или со свободной поверхностью оказывает зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и концентрации и порождаемый термоконцентрационный эффект. В 1958 году выходит первая теоретическая работа, выполненная J.R.A. Pearson, в которой исследован механизм неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости со свободной поверхностью при отсутствии массовых сил. В этой работе был получен принципиальный результат: наличие только термокапиллярных сил может приводить к возникновению движения в жидкости. Дальнейшее теоретическое изучение влияния термокапиллярного эффекта на устойчивость равновесия было продолжено рядом авторов L.E.Scriven, C.V. Sterling (1964), J.C. Berg (1972), А.А. Непомнящий, И.Б. Симановский (1985, 1986) и др.

Исследование процессов, связанных с термокапиллярным и термоконцентрационными эффектами, происходящих в расплавленной зоне при выращивании кристаллов в условиях невесомости, лазерной обработке материалов с плавлением, определение состава нефти и разделение ее компонентов, является крупной научной проблемой, имеющей важное значение для оптимизации технологических процессов.

Диссертационная работа посвящена численному изучению устойчивости равновесного состояния и течений плоского слоя конечной толщины

бинарных смесей с учетом эффекта термодиффузии, а также изучению инвариантного решения уравнений термодиффузии, когда на поверхности раздела двух несмешивающихся бинарных смесей коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры и концентрации, а также источником движения являются нестационарные градиенты давления.

Термодиффузия часто встречается в природе, а также имеет множество приложений в технике. Основу модели термодиффузии бинарной смеси составляет система уравнений Навье–Стокса, дополненная уравнениями тепло- и массопереноса. Точные решения уравнений конвекции бинарной смеси рассматривались в работах Гершуни Г.З., Жуховицкого Е.М., Сорокина Л.Е. (1980) и Yanase S., Kohno K. (1985), посвященных в основном изучению устойчивости соответствующих движений. Результаты исследования устойчивости механического равновесия бинарной смеси с учетом термодиффузии можно найти в работах Гершуни Г.З., Жуховицкого Е.М. Устойчивость термодиффузионного движения в вертикальном слое при наличии поперечной разности температур рассматривалась в работе тех же авторов, а при наличии еще и продольного градиента концентрации — в работе Николаева Б.И., Тубина А.А. В статье Смородина Б.Л. изучалась неустойчивость плоского горизонтального слоя несжимаемой бинарной газовой смеси под действием поперечного, модулированного по времени градиента температуры.

Цель диссертационной работы заключается в исследовании устойчивости состояния равновесия двух несмешивающихся несжимаемых теплопроводных бинарных смесей с общей поверхностью раздела и однослойного термодиффузионного движения смеси в плоском слое со свободной границей, а также изучении инвариантного решения уравнений термодиффузии, происходящего под действием нестационарного градиента давления.

Методы исследования. В качестве математической модели используются уравнения термодиффузии с граничными условиями, учитывающими термодинамику поверхности раздела и свободной поверхности. С помощью метода нормальных возмущений исходные уравнения сводятся к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений со сложными граничными условиями. Для получения результатов использовались методы решения дифференциальных уравнений, асимптотические и численные методы. Спектральные задачи решались методом ортогонализации с применением метода секущих. Кроме того использовался метод преобразования Лапласа, метод априорных оценок.

Научная новизна. В диссертации впервые исследованы устойчивость течения плоского слоя со свободной поверхностью, устойчивость равновесного состояния бинарных смесей с поверхностью раздела. Исследова-

ны начально-краевые задачи, описывающие двухслойные течения бинарных смесей, получены априорные оценки возмущений скорости и температуры и концентрации.

Теоретическая и практическая значимость. Проведенные исследования вносят определенный вклад в изучение факторов влияющих на устойчивость равновесия и движения бинарных смесей с общей поверхностью раздела, а также обладающих свободной границей. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании явлений, происходящих в смесях в условиях, близких к невесомости.

Достоверность полученных результатов. Достоверность результатов диссертации подтверждается использованием классических математических моделей механики сплошных сред и математических методов их исследования, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, семинарах и научных школах:

— VII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Красноярск, 2006 г.),

— Конференция молодых ученых Института Вычислительного моделирования СО РАН (г.Красноярск, 2004-2006 гг.),

— Семинарах Института Вычислительного моделирования СО РАН "Математическое моделирование в механике" под руководством профессора В.К. Андреева.

— Семинаре Института Вычислительного моделирования СО РАН "Проблемы математического и численного моделирования" под руководством член-корреспондента РАН В.В. Шайдурова.

— Семинаре Института вычислительных технологий СО РАН "Информационно-вычислительные технологии" под руководством академика Ю.И. Шокина;

— Семинаре отдела прикладной гидродинамики Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (г.Новосибирск) под руководством член-корреспондента РАН В.В. Пухначева.

— Семинаре Института теоретической и прикладной механики СО РАН под руководством академика В.М. Фомина.

— Четвертая Сибирская школа-семинар "Математические проблемы механики сплошных сред"(г.Новосибирск, 2000 г.)

—Международная конференция "Симметрия и дифференциальные уравнения"(г. Красноярск, 2000 – 2002 гг.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, который содержит 67 наименований. Общий объем диссертации 113 страниц, включая 16 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности работы, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены ее основные результаты. Приведена математическая формулировка начально-краевой задачи о движении двух несмешивающихся несжимаемых бинарных смесей с общей границей раздела.

В первой главе проведена линеаризация задачи о малых возмущениях двух несмешивающихся несжимаемых теплопроводных бинарных смесей с общей границей раздела и со свободной поверхностью. При этом учитываются эффекты термодиффузии (эффект Соре).

Пусть известно решение $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$, $p_j(\mathbf{x}, t)$, $\theta_j(\mathbf{x}, t)$, $c_j(\mathbf{x}, t)$ уравнений движения несжимаемой теплопроводной в области Ω_j . Положим $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, где \mathbf{X} — вектор смещений частиц жидкости, или вектор возмущений, $\mathbf{X}|_{t=0} = 0$. Рассмотрим решение $\tilde{\mathbf{u}}_j, \tilde{p}_j, \tilde{\theta}_j, \tilde{c}_j$ исходной задачи в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &= \mathbf{u}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + \mathbf{U}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{p}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = p_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + P_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \\ \tilde{\theta}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) &= \theta_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + T_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \quad \tilde{c}_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = c_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + K_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{U}_j, P_j, T_j, K_j$ возмущения основного решения $\mathbf{u}_j, p_j, \theta_j, c_j$. Предполагая, что эти возмущения малы и область $\tilde{\Omega}_j$ мало отличается от Ω_j ($|\mathbf{X}| \ll 1$) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \mathbf{U}_j + \mathbf{U}_j \cdot \nabla \mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_j} \nabla P_j &= \nu_j \Delta \mathbf{U}_j, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}_j = 0, \\ T_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla T_j + \mathbf{U}_j \cdot \nabla \theta_j &= \chi_j \Delta T_j, \\ \mathbf{X}_t + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{X} &= (\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{u}_j + \mathbf{U}_j, \\ K_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla K_j + \mathbf{U}_j \cdot \nabla c_j &= d_j \Delta [K_j + \alpha_j T_j]. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогичным образом, после линеаризации граничных условий, будем иметь на поверхности раздела:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial n} R &= \mathbf{U}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial n} R, \quad T_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial n} R = T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial n} R, \\ K_1 + \frac{\partial c_1}{\partial n} R &= \lambda \left(K_2 + \frac{\partial c_2}{\partial n} R \right), \\ -[P]_{\Gamma} + 2\{[\rho \nu D(\mathbf{U})]_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + [\rho \nu D(\mathbf{u})]_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1\} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D_2^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial n} H + \frac{\partial \sigma}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial n} H - 2 \left[\rho \nu \frac{\partial D(\mathbf{u})}{\partial n} \right]_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \right\} R + \\
&\quad + \sigma \Delta_{\Gamma} R + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} H T + \frac{\partial \sigma}{\partial c} H K, \\
&2 \left\{ [\rho \nu D(\mathbf{U})]_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha_{1,2}} + \left[\rho \nu \frac{\partial D(\mathbf{u})}{\partial n} \right]_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha_{1,2}} R + [\rho \nu D(\mathbf{u})]_{\Gamma} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n} R)_{\alpha_{1,2}} + \right. \\
&\quad \left. + [\rho \nu D(\mathbf{u})]_{\Gamma} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} \right\} = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \left[\frac{\partial T}{\partial \alpha_{1,2}} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R \right)_{\alpha_{1,2}} \right] + \\
&\quad + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R + T \right) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_{1,2}} + \frac{\partial \sigma}{\partial c} \left(\frac{\partial K}{\partial \alpha_{1,2}} + \left(\frac{\partial c}{\partial n} R \right)_{\alpha_{1,2}} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial n} R + K \right) \frac{\partial c}{\partial \alpha_{1,2}} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta \partial c} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial n} R + K \right) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_{1,2}} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} R + T \right) \frac{\partial c}{\partial \alpha_{1,2}} \right], \\
&\quad \left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \left[k \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \right]_{\Gamma} R + [k \nabla \theta]_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\
&\quad \left[d \left(\frac{\partial K}{\partial n} + \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} R + \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} R + \frac{\partial T}{\partial n} \right) \right) \right]_{\Gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

где α_1, α_2 – параметризация поверхности Γ , $\mathbf{x}_{\alpha_1}, \mathbf{x}_{\alpha_2}$ – базис касательной к Γ плоскости, $R = \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}$ – нормальная составляющая вектора возмущений на поверхности раздела, \mathbf{n}_1 – проекция возмущения нормали \mathbf{n} на касательную плоскость, D_1, D_2 – главные радиусы кривизны невозмущенной поверхности Γ . На твердых стенках Σ

$$\mathbf{U}_j = 0, \quad \mathbf{X} = 0, \quad T_j = 0, \quad \frac{\partial K_j}{\partial n} + \alpha_j \frac{\partial T_j}{\partial n} = 0. \tag{4}$$

Глава 2 посвящена исследованию устойчивости равновесия двух несмешивающихся плоских слоев смесей с общей поверхностью раздела $y = 0$. Плоскости $y = \pm l$ – суть непроницаемые твердые стенки. Задача о термодиффузионном равновесии с поверхностью раздела при данных условиях имеет решение (напомним, что массовые силы отсутствуют)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_j = 0, \quad p_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, \\
&\theta_1 = \frac{\theta_{10} - \theta_{20}}{(k+1)l} y + \frac{\theta_{20} + k\theta_{10}}{k+1}, \quad \theta_2 = \frac{k(\theta_{10} - \theta_{20})}{(k+1)l} y + \frac{\theta_{20} + k\theta_{10}}{k+1}, \\
&c_1 = -\frac{\alpha_1(\theta_{10} - \theta_{20})}{(k+1)l} y + c^0, \quad c_2 = -\frac{\alpha_2 k(\theta_{10} - \theta_{20})}{(k+1)l} y + c^0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь θ_{10}, θ_{20} — температура твердых стенок при $y = \pm l$ соответственно, $k = k_1/k_2$ — отношение коэффициентов теплопроводностей; $\alpha_j = k_\theta^j/\theta_c$, k_θ^j — коэффициенты термодиффузии, c^0 — концентрация на границе раздела (все эти величины считаем постоянными).

В п.2.2 получены амплитудные уравнения. Ищем решение задачи в виде нормальных волн ($\eta = y/l$, $\xi = x/l$, τ — безразмерное время)

$$(U, V, P, T, K, R) = (U(\eta), V(\eta), P(\eta), T(\eta), K(\eta), R) \exp(i\alpha\xi - iC\tau), \quad (6)$$

где α — волновое число, C — комплексный декремент.

Подставляя (6) в систему линеаризованных уравнений (2), получим систему амплитудных уравнений в безразмерном виде. При этом спектральная задача относительно декремента C такова:

$$\begin{aligned} U_j'' + \left(\frac{\nu_2}{\nu_j}iC - \alpha^2\right)U_j - P_j i\alpha &= 0, & V_j'' + \left(\frac{\nu_2}{\nu_j}iC - \alpha^2\right)V_j - P_j' &= 0, \\ i\alpha U_j + V_j' &= 0, & T_j'' + \left(\frac{\nu_2}{\chi_j}iC - \alpha^2\right)T_j - \varepsilon_j V_j &= 0, \\ K_j'' + \left(\frac{\nu_2}{d_j}iC - \alpha^2\right)K_j + Pr_j(T_j'' - \alpha^2 T_j) + \frac{\nu_j}{d_j}V_j \varepsilon_j &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия на твердых стенках сводятся к следующим:

$$U_j = 0, \quad V_j = 0, \quad T_j = 0, \quad \frac{\partial K_j}{\partial \eta} + Pr_j \frac{\partial T_j}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = \pm 1. \quad (8)$$

Условия на поверхности раздела $\eta = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} U_2 &= \nu U_1, & V_2 &= \nu V_1, & K_2 - \varepsilon_2 R &= \bar{\alpha} (K_1 - \varepsilon_1 R), \\ T_2 + \varepsilon_2 R &= \frac{\nu}{\chi} (T_1 + \varepsilon_1 R), & \frac{\partial T_2}{\partial \eta} &= \frac{k\nu}{\chi} \frac{\partial T_1}{\partial \eta}, \\ \rho\nu^2 P_1 - P_2 + 2V_{2\eta} - 2\rho\nu^2 V_{1\eta} &= -\alpha^2 We R, \end{aligned} \quad (9)$$

$$U_{2\eta} + i\alpha V_2 - \rho\nu^2 (U_{1\eta} + i\alpha V_1) = -Mi\alpha (T_2 + \varepsilon_2 R) - i\alpha Sr (K_2 - \varepsilon_2 R),$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \eta} + Pr_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = d\bar{\alpha} \left(\frac{\partial K_1}{\partial \eta} + Pr_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right), \quad R = \frac{iV_2}{C}.$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{k+1}, & \varepsilon_2 &= \frac{k}{k+1}, & Sc_j &= \frac{\nu_j}{d_j}, & Pr_j &= \frac{\nu_j}{\chi_j}, & j &= 1, 2. \\ \nu &= \frac{\nu_1}{\nu_2}, & \bar{\alpha} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, & \chi &= \frac{\chi_1}{\chi_2}, & \rho &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, & We &= \frac{\sigma_0 l}{\rho_2 \nu_2^2} \text{ (число Вебера),} \end{aligned}$$

$$M = \frac{\varkappa_1(\theta_{10} - \theta_{20})l}{\rho_2\nu_2\chi_2} \text{ (число Марангони),} \quad Sr = \frac{\varkappa_2\alpha_2l(\theta_{10} - \theta_{20})}{\rho_2\nu_2^2} \text{ (число Соре).}$$

Основными безразмерными параметрами задачи являются: число Марангони, отвечающее за действие термокапиллярного эффекта; число Вебера, характеризующее деформируемость свободной поверхности, предельный случай числа Вебера, равного бесконечности, соответствует жесткой недеформируемой свободной границе; число Соре отвечает за действие эффекта термодиффузии.

Для численного исследования положения равновесия используется метод ортогонализации Годунова с применением метода секущих. Для запуска метода секущих необходимы два приближения. В п. 2.3 найдены начальные приближения для декремента C . Для этого рассматривались длинноволновое приближение решения амплитудных уравнений

$$\begin{aligned} U_j &= U_j^0 + \alpha U_j^1 + \dots, & V_j &= \alpha V_j^0 + \alpha^2 V_j^1 + \dots, & P_j &= P_j^0 + \alpha P_j^1 + \dots, \\ T_j &= \alpha T_j^0 + \alpha^2 T_j^1 + \dots, & K_j &= \alpha K_j^0 + \alpha^2 K_j^1 + \dots, & C &= C^0 + \alpha C^1 + \dots, \\ R &= \alpha R^0 + \alpha^2 R^1 + \dots \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в спектральную задачу (7) - (9) дает выражение для нахождения нулевого приближения декремента C :

$$\sin\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}}iC^0\right) \cos(\sqrt{iC^0}) + \rho\sqrt{\nu} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}}iC^0\right) \sin(\sqrt{iC^0}) = 0. \quad (10)$$

Например, для системы глицерин - метиловый спирт $C^0 = -2.467i, -17.53i, -22.206i\dots$ При рассмотрении системы в первом приближении получим, что $C^1 = 0$, а C^2 выписывается в явном виде.

В п. 2.4 рассматриваются только стационарные возмущения (возмущения затухают или усиливаются монотонно, без колебаний) и в линеаризованной задаче исчезают все производные по времени, система существенно упрощается и получается спектральная задача относительно числа Марангони, в результате решения которой зависимость числа Марангони от волнового числа α для деформируемой поверхности раздела такова:

$$\begin{aligned} M(We) &= \frac{1 + \rho\nu}{\alpha\varepsilon_1g_1} - \frac{Sr(d\bar{\alpha}\varepsilon_1Sc_1 - \varepsilon_2Sc_2\nu)}{8\alpha(1+d)\varepsilon_1\nu g_1} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{cth\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2g(\alpha)} + a(\alpha) \right) + \\ &+ \frac{SrPr_1\varepsilon_2(1-\chi)(1+d\bar{\alpha})}{8(1+d)\nu g_1} F(\alpha)th(\alpha) + \frac{Sr(1+d\bar{\alpha})}{g_1\alpha We(1+d)} a(\alpha)(1-\rho\nu), \quad (11) \end{aligned}$$

с известными функциями $g_1, b(\alpha), a(\alpha), g(\alpha), F(\alpha)$.

Если поверхность недеформируема, т.е. $We \gg 1$ (это часто выполнено для экспериментов в условиях орбитального полета), а значит $R = 0$ (нормальная составляющая вектора возмущений на поверхности раздела). Тогда число Марангони определяется следующим выражением:

$$M = \frac{8\chi(\rho\nu + 1)}{F(\alpha)\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \chi)} \operatorname{cth}\alpha + \frac{\operatorname{SrPr}_2(1 + d\bar{\alpha})}{1 + d} - \frac{\operatorname{Sr}\chi(d\bar{\alpha}\varepsilon_1 S c_1 - \varepsilon_2 S c_2\nu)}{F(\alpha)\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \chi)\nu(1 + d)} \operatorname{cth}\alpha \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\operatorname{cth}\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 g(\alpha)} + a(\alpha) \right). \quad (12)$$

Формула (12) получена при условии $\chi = \chi_1/\chi_2 \neq 1$. Если же $\chi = 1$, т.е. коэффициенты температуропроводностей жидкостей совпадают, возмущение температуры на поверхности раздела равно нулю. Поэтому термокапиллярный эффект отсутствует и можно найти критическое число Co_c :

$$\operatorname{Sr} = \frac{8\nu(1 + \rho\nu)(1 + \rho d)}{(\rho d\bar{\alpha}\varepsilon_1 S c_1 - \varepsilon_2 S c_2\nu)P(\alpha)}, \quad (13)$$

$P(\alpha)$ известная функция.

В п.2.5 на основе метода ортогонализации и метода секущих предложен алгоритм для численного исследования устойчивости задачи (7) - (9). Особенность применения метода ортогонализации к данной задаче заключается в том, что в каждом слое запускается "классический" метод ортогонализации с граничными условиями на левом участке, при достижении правых участков происходит "склеивание" граничных условий. Для начала с помощью простой замены сведем задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение полученной системы ищем в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{m=1}^4 p_m \mathbf{y}^m, \quad \mathbf{z} = \sum_{m=1}^4 q_m \mathbf{z}^m. \quad (14)$$

где \mathbf{y} , \mathbf{z} — вектора решений, а \mathbf{y}^m , \mathbf{z}^m — m линейно независимых векторов, $m = 4$ — количество граничных условий на левом конце интервала. Выбираем \mathbf{y}^m , \mathbf{z}^m так, чтобы \mathbf{y} , \mathbf{z} , удовлетворяющих соответствующим условиям на твердых стенках. В качестве начальных приближений декремента выбираем C^0 , C^2 из условий (10).

Исследовалась устойчивость системы 80 % глицерин - 90 % раствор метилового спирта, ограниченных твердыми стенками и имеющих общую поверхность раздела. Для данной системы были численно найдены зависимости $C_i = \operatorname{Im} C$ от волнового числа α . Результаты приведены на рис.1. Установлено, что при увеличении числа Марангони область устойчивости смещается в

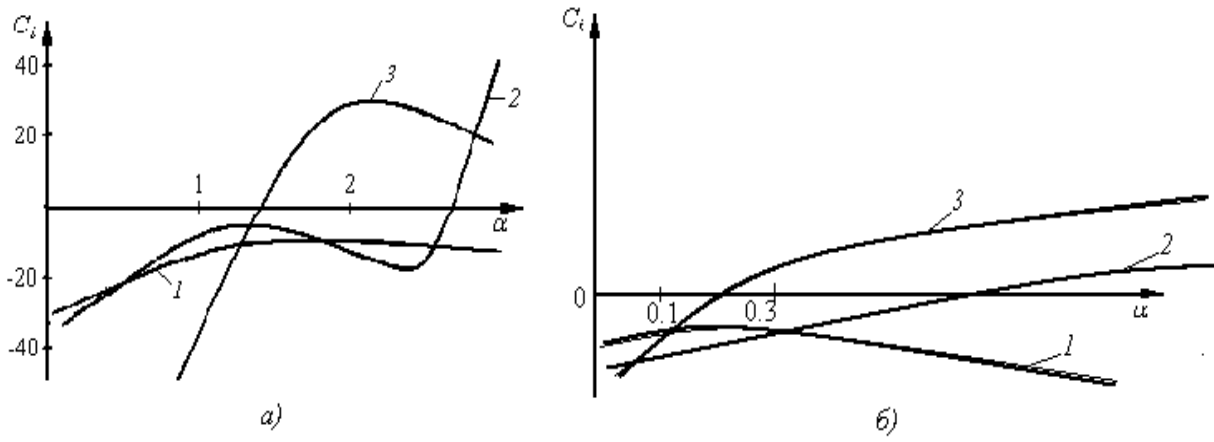


Рис. 1: Зависимость C_i от волнового числа α : а) кривая 1 — $M = 290$, 2 — $M = 590$, 3 — $M = 1590$ ($We = 100$, $Sr = -10$); б) кривая 1 — $Sr = -1$, 2 — $Sr = -10$, 3 — $Sr = -100$ ($M = 300$, $We = 100$)

сторону длинных волн, а также при росте числа Соре область неустойчивости уменьшается.

В главе 3 исследуется устойчивость термокапиллярного течения в двухкомпонентной жидкости для недеформируемой свободной границы с учетом термодиффузии (эффекта Соре).

В п. 3.1 сформулирована задача со свободной поверхностью и выписано стационарное решение, удовлетворяющее условию замкнутости потока

$$u_0 = \frac{MPr^{-1}}{2} \left(\frac{3}{2}\xi^2 - \xi \right), \quad \theta_0 = -\frac{MPr^{-1}}{12} \left(\frac{3\xi^4 + 1}{4} - \xi^3 \right) - xPr^{-1}, \quad (15)$$

$$p_{0x} = \frac{3}{2}MPr^{-1}, \quad c_0 = \frac{SrMPr^{-1}}{12} \left(\frac{3\xi^4 + 1}{4} - \xi^3 \right) + 1.$$

Индекс "0" в (15) означает основное течение. Далее исследуется устойчивость этого квадратичного или, как его еще называют, *возвратного течения*.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением только термокапиллярной неустойчивости, без учета поверхностных волн, т.е. предположим, что свободная поверхность недеформируема (это означает, число Вебера достаточно велико: $We \gg 1$).

Решение задачи со свободной поверхностью ищем в виде нормальных волн с волновыми числами по направлениям x , y α, β соответственно, τ — безразмерное время, $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент. В результате получаем спектральную задачу относительно декремента C .

В п.3.2 найдено нулевое и первое приближение для декремента C

$$C^0 = -i\left(\beta^2 + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}\right), \quad C^1 = \frac{M}{8Pr\mu_n^2}. \quad (16)$$

В п.3.3, предположив, что возмущения плоские ($\alpha = 0$), получена аналитическая зависимость нейтральных чисел Марангони от волнового числа β и физических параметров. Уравнение является квадратным относительно числа Марангони, поэтому в плоском случае имеется две нейтральные кривые, обозначающие границу устойчивости движения относительно монотонных возмущений.

В п. 3.4 исследуется устойчивость термокапиллярного движения двухкомпонентной жидкости для произвольных возмущений методом ортогонализации. Полученные аналитически нейтральные кривые для монотонных возмущений использовались в качестве тестов при расчетах. Расчеты проводились при следующих параметрах: $D_0 = 10^{-4}$, $D_1 = 30$, $D_2 = 10^3$, $Sr = 10$, $Sc = 10$, $M_c = 5$, $Bi = 0$, $Pr = 0.016$.

В результате расчетов обнаружено, что рост числа Марангони приводит к уменьшению области длинноволновой устойчивости. Полученные результаты согласуются с графиками нейтральных кривых. При $\alpha = 0$ для чисел Марангони, меньших $M_* < 1000$ будет всегда наблюдаться длинноволновая устойчивость.

Четвертая глава посвящена исследованию двухслойных термодиффузионных течений смесей, имеющих общую границу раздела под действием перепада давления и термоконцентрационных сил.

Система уравнений двумерной термодиффузии допускает однопараметрическую подгруппу, соответствующую оператору

$$\frac{\partial}{\partial x} + A_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + B_j \frac{\partial}{\partial c_j} - \rho_j f_j(t) \frac{\partial}{\partial p_j},$$

A_j, B_j — постоянные, $f_j(t)$ — функции времени. Таким образом, инвариантное решение следует искать в виде

$$\begin{aligned} u_j &= u_j(y, t), & v_j &= 0, & p_j &= -\rho_j f_j(t)x + P_j(t), \\ \theta_j &= A_j x + T_j(y, t), & c_j &= B_j x + K_j(y, t). \end{aligned} \tag{17}$$

Решению (17) можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что на границе раздела двух смесей $y = 0$ поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации: $\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - \varkappa_1 \theta - \varkappa_2 c$, где $\varkappa_1 > 0$, \varkappa_2 — постоянные. В начальный момент времени первая смесь заполняет слой $-l_1 < y < 0$, а вторая — слой $0 < y < l_2$. Смеси находятся в покое, и при $t = 0$ во всем пространстве мгновенно создается поле температур $\theta_j = A_j x$ и поле концентраций $c_j = B_j x$. Термоконцентрационный эффект и градиенты давления $f_j(t)$ порождают движение смесей, в котором поверхность раздела остается плоскостью $y = 0$, а траектории являются прямыми, параллельными

оси x . Функции u_j, T_j, K_j можно назвать *возмущениями состояния покоя смесей*.

Подстановка (17) в систему уравнений термодиффузионного движения с учетом условий на границе раздела $y = 0$ приводит к начально-краевой задаче

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy} + f_j(t); \quad T_{jt} = \chi_j T_{jyy} - Au_j; \quad (18)$$

$$K_{jt} = d_j K_{jyy} + \alpha_j d_j T_{jyy} - B_j u_j$$

при $-l_1 < y < 0$ ($j = 1$), $0 < y < l_2$ ($j = 2$);

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad K_1(0, t) = \lambda K_2(0, t); \quad (19)$$

$$k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t); \quad (20)$$

$$d_1(K_{1y}(0, t) + \alpha_1 T_{1y}(0, t)) = d_2(K_{2y}(0, t) + \alpha_2 T_{2y}(0, t)); \quad (21)$$

$$\rho_2 \nu_2 u_{2y}(0, t) - \rho_1 \nu_1 u_{1y}(0, t) = -\alpha_1 A - \alpha_2 B_1 \equiv H; \quad (22)$$

$$u_j(y, 0) = 0, \quad T_j(y, 0) = 0, \quad K_j(y, 0) = 0. \quad (23)$$

$$u_1(-l_1, t) = 0, \quad u_2(l_2, t) = 0, \quad T_1(-l_1, t) = 0, \quad T_2(l_2, t) = 0 \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial K_j}{\partial y} + \alpha_1 \frac{\partial T_j}{\partial y} \right) \Big|_{y=-l_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial K_j}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial T_j}{\partial y} \right) \Big|_{y=l_2} = 0 \quad (25)$$

Видно, что уравнения (18)–(25) образуют три последовательно решаемые задачи для функций (u_1, u_2) , (T_1, T_2) , (K_1, K_2) . В силу линейности задачу для нахождения поля скоростей удобно разбить на две: неоднородную в слоях ($f_j(t) \neq 0$) с нулевым граничным условием (22) и однородную ($f_j(t) = 0$) с ненулевым граничным условием (22) $H \neq 0$.

Сначала рассматривается задача об определении поля скоростей в слоях *только при внезапно возникшем перепаде давления в одном из слоев*.

Для решений этой системы получена априорная оценка и на ее основе доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Решение задачи для определения поля скоростей в слоях только при внезапно возникшем перепаде давления в одном из слоев при выполнении условия $\int_0^\infty |f(t)| e^{2\delta t} dt \equiv \sqrt{C_1} > 0$, и $t \rightarrow \infty$ стремится к нулевому решению, причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$|u_j(y, t)| \leq \left(2\delta_1 \sqrt{\frac{2C_1 C_3}{\mu_j \rho_j}} \right)^{1/2} e^{-\delta t}, \quad (26)$$

равномерные в интервалах $(-l_1, 0)$, $(0, l_2)$.

Здесь $f(t) \equiv f_1(t)$, $\int_0^{\infty} f^2(t) dt \equiv C_2 > 0$, $C_3 = \rho_1(l_1 + l_2)C_2$,

$\delta = \min(l_1^{-2}\nu_1, l_2^{-2}\nu_2)$, $\delta_1 = \rho_1 \max(\sqrt{l_1/\rho_1}, \sqrt{l_2/\rho_2})$, $j = 1, 2$.

Другими словами, если градиент давления в одной из смесей достаточно быстро стремится к нулю, то происходит торможение смесей за счет вязкого трения согласно неравенствам (26).

Для получения более точной информации о поведении скоростей применяется преобразование Лапласа, в результате чего приходим к краевой задаче для изображений $\tilde{u}_j(y, p)$. После некоторых выкладок найдем для изображений следующее представление

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(y, p) = & -\frac{\tilde{f}(p)}{pW(p)} \left\{ \left[\rho - (\rho - 1) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (y + l_1) - \right. \\ & \left. - \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} y + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} y - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \right\}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(y, p) = & -\frac{\tilde{f}(p)}{pW(p)} \left\{ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \left[1 + (\rho - 1) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - y) + \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \rho \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} y - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 + \rho \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} y - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{f}(p)$ — изображение $f(t)$, $\rho = \rho_1/\rho_2$, $\mu = \mu_1/\mu_2$, $\nu = \nu_1/\nu_2$, а

$$W(p) = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\nu}} + \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right).$$

Предположив, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_0 = \text{const}$, тогда $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{f}(p) = f_0$ (в этом случае функция $f(t)$ не удовлетворяет условию теоремы 3), вычислен $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{u}_j(y, p)$ согласно формулам (27). Простые, но длинные выкладки показывают, что (использовано равенство $\rho\nu = \mu$ и обозначение $l = l_1/l_2$)

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{u}_1(y, p) &= \frac{l_1^2 f_0}{2\nu_1} \left[-\left(\frac{y}{l_1}\right)^2 + \frac{\mu - l^2}{l(\mu + l)} \left(\frac{y}{l_1}\right) + \frac{\mu(l + 1)}{l(\mu + l)} \right] \equiv u_1^0(y); \\ \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{u}_2(y, p) &= \frac{l_2^2 f_0 \mu}{2\nu_1} \left[-\left(\frac{y}{l_2}\right)^2 + \frac{\mu - l^2}{\mu + l} \left(\frac{y}{l_2}\right) + \frac{l(l + 1)}{\mu + l} \right] \equiv u_2^0(y). \end{aligned} \quad (28)$$

Легко проверяется, что правые части в (28) являются *точным стационарным решением* задачи для определения поля скоростей в слоях только при внезапно возникшем перепаде давления в одном из слоев.

К (27) применен численный метод обратного преобразования Лапласа. Численные результаты подтверждают выход решения рассматриваемой задачи на стационарный режим (28).

Далее решение ищется в полуограниченных слоях (устремим в формулах (27) l_1 и l_2 к бесконечности). Оригиналы для полученных выражений восстанавливаются по формуле обращения. Предположив, что $f(t) = f_1/\sqrt{t}$ с постоянной f_1 , после некоторых преобразований получим автомодельное решение краевой задачи

$$U_1(y, t) = 2f_1\sqrt{t} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\nu}(\rho - 1)}{\mu + \sqrt{\nu}} \left[\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{4}\right) + \frac{1}{2} \xi_1 \int_{-\infty}^{\xi_1} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi \right] \right\},$$

$$U_2(y, t) = 2f_1\sqrt{t} \left\{ \rho - \frac{\mu(\rho - 1)}{\mu + \sqrt{\nu}} \left[\exp\left(-\frac{\xi_2^2}{4}\right) - \frac{1}{2} \xi_2 \int_{\xi_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi \right] \right\},$$

где $\xi_j = y/\sqrt{\nu_j t}$ — автомодельная переменная.

Очень часто вместо перепада давления задают объемный расход жидкостей в слоях:

$$Q_1(t) = \int_{-l_1}^0 u_1(y, t) dy, \quad Q_2(t) = \int_0^{l_2} u_2(y, t) dy. \quad (29)$$

Например слой $(-l_1, 0)$ — вода, а слой $(0, l_2)$ — нефть, и задан расход нефти $Q_2(t)$. Применяя преобразование Лапласа к равенствам (29) и используя формулы (27), для изображений скоростей, получим изображение для расходов, из которого выразим $\tilde{f}(p)$, а по формуле обратного преобразования Лапласа восстанавливаем $f(t)$. Далее возможно определить расход в первой жидкости (воде).

П.4.5 посвящен определению возмущения поля скоростей, возникающего под действием термоконцентрационных сил. Поскольку $H \neq 0$, то в начальный момент времени имеется разрыв в условии (22), так как при $t = 0$ его левая часть равна нулю согласно (23). Такая задача имеет стационарное решение (течение Куэтта в слоях)

$$u_1^0 = a \left(1 + \frac{y}{l_1} \right), \quad u_2^0 = a \left(1 - \frac{y}{l_2} \right), \quad (30)$$

где

$$a = -\frac{Hl_1}{\mu_2(\mu + l)}, \quad H = -(\alpha_1 A + \alpha_2 B_1), \quad l = \frac{l_1}{l_2}. \quad (31)$$

Применение преобразования Лапласа позволяет определить вид изображений. Полученные выражения удовлетворяют свойствам преобразования

Лапласа, а именно $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{u}_j(y, p) = u_j^0(y)$ с функциями $u_j^0(y)$ из (30), (31), что и должно быть.

Для получения априорной оценки вводятся новые функции, которые задают отклонение от стационарного решения $w_j(y, t) = u_j^0(y) - u_j(y, t)$, тем самым начальные данные становятся ненулевыми и граничное условие (22) выполнено для любых $t > 0$; при $t = 0$ его правая часть равна H . После некоторых преобразований приходим к следующему результату

Теорема 2. *Решение начально-краевой задачи для определения возмущения поля скоростей, возникающего под действием термоконцентрационных сил единственно и при $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим (30), причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$|u_j(y, t) - u_j^0(y)| \leq 2 \sqrt{\frac{2E(0)D_1}{\rho_j \mu_j}} e^{-\delta t} \quad (32)$$

с постоянными $E(0) = \frac{a^2}{6} (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)$, $D_1 = a^2 \left(\frac{\mu_1}{l_1} + \frac{\mu_2}{l_2} \right)$.

Далее в п.4.6 рассматривается эволюция температурных возмущений. Для возмущений температуры, возникающего под действием градиента давления получены следующие априорные оценки

$$|T_1(y, t)| \leq \left(2 \sqrt{\frac{2\delta_4 E_2(t)}{k_1 \rho_1 c_{01}}} \right)^{1/2}, \quad |T_2(y, t)| \leq \left(2 \sqrt{\frac{2\delta_4 E_2(t)}{k_2 \rho_2 c_{02}}} \right)^{1/2}.$$

Здесь

$$E_2(t) \leq \begin{cases} \frac{\delta_3^2}{4(\delta_2 - \delta)^2} (e^{-2\delta t} - e^{-2\delta_2 t})^2, & \delta_2 \neq \delta; \\ \delta_3^2 t^2 e^{-4\delta_2 t}, & \delta_2 = \delta, \end{cases} \quad (33)$$

$$\delta_2 = \min(l_1^{-2} \chi_1, l_2^{-2} \chi_2), \quad \delta_3 = \sqrt{2} |A| \delta_1 \sqrt{C_1} \max(\sqrt{c_{01}}, \sqrt{c_{02}}),$$

$$\delta_4 = \frac{A^2 \delta_1^2 C_1}{2\delta} (c_{01} + c_{02}).$$

Поэтому, в данном случае, возмущения температуры экспоненциально затухают со временем (как $e^{-\delta t}$ при $\delta \leq \delta_2$ и $e^{-\delta_2 t}$ при $\delta > \delta_2$).

Стационарное решение задачи для определения возмущений температуры (начальные данные (24) при этом не учитываются) описывается поли-

номами четвертого порядка по y :

$$\begin{aligned} T_1^0(y) &= \frac{Al_1^2 f_0}{2\chi_1 \nu_1} \left[-\frac{y^4}{12l_1^2} + \frac{(\mu-l^2)y^3}{6l_1 l(\mu+l)} + \frac{\mu(l+1)y^2}{2l(\mu+l)} \right] + a_1 y + a_2, \\ T_2^0(y) &= \frac{Al_2^2 f_0 \mu}{2\chi_2 \nu_1} \left[-\frac{y^4}{12l_2^2} + \frac{(\mu-l^2)y^3}{6l_2(\mu+l)} + \frac{l(l+1)y^2}{2(\mu+l)} \right] + k a_1 y + a_2, \end{aligned} \quad (34)$$

где постоянные a_1 , a_2 находятся по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{Al_2^3 f_0}{24\chi_1 \nu_1 (\mu+l)(k+l)} \left[l^3(5\mu l + 4\mu + l^2) - \chi \mu(\mu + 4l^2 + 5l) \right], \\ a_2 &= -\frac{Al_1 l_2^3 f_0}{24\chi_1 \nu_1 (\mu+l)(k+l)} \left[kl^2(5\mu l + 4\mu + l^2) + \chi \mu(\mu + 4l^2 + 5l) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Применение преобразования Лапласа приводит к явному виду для изображений $T_j(y, t)$. Доказано, что $\lim_{t \rightarrow \infty} T_j(y, t) = T_j^0(y)$, то есть с ростом времени возмущение температур в слоях выходит на стационарный режим, если $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_0$. Для этого вычисляются пределы $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{T}_j(y, p)$.

Для возмущения температуры, возникающего под действием термоконцентрационных сил найдено следующее стационарное решение

$$\begin{aligned} T_1^0(y) &= \frac{aA}{\chi_1} \left(\frac{y^3}{6l_1} + \frac{y^2}{2} \right) + a_1 y + a_2, \quad T_2^0(y) = \frac{aA}{\chi_2} \left(-\frac{y^3}{6l_2} + \frac{y^2}{2} \right) + k a_1 y + a_2, \\ a_1 &= \frac{aAl_2(l^2 - \chi)}{3\chi_1(k+l)}, \quad a_2 = -\frac{aAl_1 l_2(kl + \chi)}{3\chi_1(k+l)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь, в отличие от (34), для $T_j^0(y)$ возникают полиномы третьей степени по y . Также показывается, что и в этом случае $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{T}_j(y, p) = T_j^0(y)$, т. е. возмущение температуры выходит на стационарный режим.

В п.4.7 рассматривается эволюция возмущений концентрации в слоях.

Стационарное распределение концентраций для случая, когда движение определяет градиент давления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} K_1^0(y) &= \frac{l_1^2 f_0}{2\nu_1} \left(\frac{\lambda B_2}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) \left[-\frac{y^4}{12l_1^2} + \frac{(\mu-l^2)y^3}{6l_1 l(\mu+l)} + \frac{\mu(l+1)y^2}{2l(\mu+l)} \right] + b_1 y + \lambda b_2, \\ K_2^0(y) &= \frac{l_2^2 f_0 \mu}{2\nu_1} \left(\frac{B_2}{d_2} - \frac{\alpha_2 A}{\chi_2} \right) \left[-\frac{y^4}{12l_2^2} + \frac{(\mu-l^2)y^3}{6l_2(\mu+l)} + \frac{l(l+1)y^2}{2(\mu+l)} \right] + b_3 y + b_2. \end{aligned} \quad (37)$$

При удовлетворении граничным условиям приходим, что *стационарное распределение концентраций в слоях имеет место лишь при отсутствии их градиентов в начальный момент времени в направлении движения. При $B_2 \neq 0$ их распределение может быть только нестационарным.*

Итак, при $B_2 = 0$ в (37)

$$b_1 = -\alpha_1 a_1, \quad b_3 = -\alpha_2 k a_1, \quad (38)$$

а постоянная b_2 определяется из интегрального соотношения.

В случае, когда движение определяется под действием концентрационных сил стационарное распределение концентраций задается формулами

$$\begin{aligned} K_1^0(y) &= \left(\frac{\lambda B_2}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) a \left(\frac{y^3}{6l_1} + \frac{y^2}{2} \right) + b_1 y + \lambda b_2, \\ K_2^0(y) &= \left(\frac{B_2}{d_2} - \frac{\alpha_2 A}{\chi_2} \right) a \left(-\frac{y^3}{6l_2} + \frac{y^2}{2} \right) + b_3 y + b_2, \end{aligned} \quad (39)$$

причем здесь вновь надо положить $B_2 = 0$, а b_1, b_3 находятся по формулам (38), где a_1 есть постоянная из (36). Таким образом, при исследовании поведения решения задачи для возмущения концентрации при $t \rightarrow \infty$ необходимо в уравнениях (18) положить $B_2 = 0$. В этом случае $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{K}_j(y, p) = K_j^0(y)$, где K_j^0 определяются по формулам (37) либо (39), т.е. возмущения концентрации выходят на стационарный режим.

Заключение содержит результаты и выводы проделанной работы:

1. Найдено равновесное состояние смесей с общей поверхностью раздела в плоских слоях, ограниченных твердыми стенками, и для монотонных возмущений этого равновесия получено явное представление числа Марангони. Построенные нейтральные кривые показывают, что при увеличении числа Соре область устойчивости смещается в сторону больших чисел Марангони.
2. Полная спектральная задача решена численно методом ортогонализации Годунова С.К., специально адаптированным для задачи с граничными условиями на двух твердых стенках и условиями на поверхности раздела. Показано, что при увеличении термокапиллярного эффекта на границе раздела устойчивость равновесного состояния понижается, усиление термодиффузионного эффекта приводит к увеличению поверхностного натяжения, а значит к стабилизации границы раздела.
3. Исследована устойчивость точного стационарного решения уравнений термодиффузии, описывающего термокапиллярное течение в плоском

слое со свободной границей (возвратное течение). Для стационарных плоских возмущений получена аналитическая зависимость нейтральных чисел Марангони от волнового числа и безразмерных физических параметров. Численное решение полной спектральной задачи приводит к выводу о том, что здесь наиболее опасными являются двумерные возмущения. Показано, что при росте числа Марангони уменьшается область длинноволновой устойчивости.

4. Изучено инвариантное решение задачи для термодиффузионного движения двух несмешивающихся смесей в плоских слоях с общей поверхностью раздела. Получены априорные оценки возмущений скорости и температуры. Найдено стационарное состояние системы и показано, что если градиент давления в одной смеси достаточно быстро стремится к нулю, то происходит торможение смесей за счет вязкого трения. То же самое справедливо для температуры и концентрации. Если градиент давления отсутствует, то скорости, температуры и концентрации выходят на стационарный режим: скорости - на течения Куэтта в слоях, а температуры и концентрации описываются полиномами третьего порядка по y . В случае существования конечного предела градиента давления скорости выходят на стационарный режим типа течения Пуазейля, а температуры и концентрации описываются полиномами четвертого порядка по y .

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В.К. Андрееву за постановку задачи, помощь и ценные советы при работе над диссертацией.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. ДОДОНОВА М.В. Стационарные термодиффузионные течения плоского слоя. // Труды Межд.конф. "Симметрия и дифференциальные уравнения" – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2000. – С. 91–95.
2. ДОДОНОВА М.В. Возникновение конвекции в двухслойной жидкости при наличии термодиффузии. // Труды Межд.конф. "Математические модели и методы их исследования" – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2001. Т.1 – С. 237–239.
3. ЕФИМОВА М.В. Решение линейной задачи об устойчивости равновесия плоских слоев с общей поверхностью раздела в модели термодиффузии // Труды III Межд.конф. "Симметрия и дифференциальные уравнения" – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002. – С. 90–96.
4. АНДРЕЕВ В.К., ЕФИМОВА М.В., РЯБИЦКИЙ Е.А. Малые возмущения конвективных течений с поверхностями раздела. // Препринт №4 – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003.

5. ЕФИМОВА М.В. Неустойчивость поверхности раздела при наличии термодиффузии в условиях невесомости. // Вычислительные технологии. – Новосибирск. 2006. Т.11, №1. С.63–69.
6. АНДРЕЕВ В.К., ЕФИМОВА М.В. Линеаризованная задача конвективного движения бинарной смеси с межфазной границей раздела // Вестник Красноярского государственного университета: физико-математические науки. – КрасГУ. 2006. Вып.1. С.175–183.
7. ЕФИМОВА М.В. О неустойчивости поверхности раздела двух бинарных смесей // Тез. докл. VII Всероссийской конф. Молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (с участием иностранных ученых). - Красноярск, 2006.
8. ЕФИМОВА М.В. Неустойчивость поверхности раздела равновесного состояния двух бинарных смесей с учетом эффекта Соре. // Вычислительные технологии. – Новосибирск. 2007. Т.12, №6 С.34 – 43.
9. ЕФИМОВА М.В. Эволюция возмущений движения бинарных смесей с плоской границей раздела под действием перепада давления и термоконцентрационных сил. – Препринт №4 – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2007. – 40с.

Работа по теме диссертации выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки, проект 12F003M (2005); Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05–01–00836 и НШ5873.2006.1 (2006), проект 02 – 01 – 00934 (2004); интеграционного проекта СО РАН 2.15 (2006); Красноярского краевого фонда науки, индивидуальный грант, проект 16G202 (2006).

Подписано в печать 30 июля 2008 г.

Формат 60×84/16

Усл. печ. л. 1. Тираж 120 экз.

Отпечатано на ризографе ИВМ СО РАН
660036 Академгородок, Красноярск